Методика оценки обучающихся на занятии

На занятии проводится проверка наличия необходимой учебно-методической литературы. В течение 10-15 минут преподаватель проводит опрос по основным вопросам данной темы занятия, которые должны быть доведены до них заранее. Может проводиться также опрос по вопросам, сформулированным самими студентами.

Провести устный опрос можно по следующим вопросам:

1. Комплексные числа.
2. Умножение матриц.
3. Определители второго и третьего порядков.
4. Минор и алгебраическое дополнение.
5. Формулы Крамера и метод решения СЛАУ с помощью обратной матрицы.
6. Метод Гаусса.

Для письменного опроса разрабатываются варианты летучек.

Методические рекомендации по отработке учебных вопросов

Решение задач по линейной алгебре

Все задачи на данном занятии решаются у доски под руководством преподавателя с исчерпывающими комментариями и теоретическими обоснованиями.

Уделить особое внимание методике решения типовых задач. Обратить внимание на формулировку условий задач. Добиться твердых навыков в решении основных типовых задач.

Методические рекомендации по проведению заключительной части

За 5 мин. до окончания занятия преподаватель даёт команду на завершение работы на рабочих местах.

Подвести итоги занятия:

кратко напомнить: наименование темы и занятия; отработанные на занятии вопросы, цели занятия и оценить степень их достижения;

отметить лучших студентов, активных и пассивных, слабоуспевающих, а также характерные ошибки и недостатки в работе. Указать способы устранения этих ошибок (недостатков);

ответить на возникшие вопросы.

Приложение 1

Занятие Решение задач по линейной алгебре

Задача 1. Для данных комплексных чисел записать:

1. $\mathrm{Re}\,z$; 2. $\mathrm{Im}\,z$; 3. $\overline{z}$; 4. Изобразить на комплексной плоскости z и $\overline{z}$; 5. $|z|$;

6. $\arg z$; 7. Представить комплексные числа в тригонометрической форме;

8. Представить комплексные числа в показательной форме.

1) $z_1 = -2 + 2j$; 2) $z_2 = \sqrt{3} - 3j$; 3) $z_3 = j$.

Задача 2. Вычислить: 1) $\dfrac{5-3j}{1-j} - 4 + 2j$; 2) $2 - 3j + \dfrac{4}{1-2j}$.

Задача 3. Возвести в степень комплексное число:

1) $\left(2\cdot\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + j\cdot\sin\dfrac{\pi}{3}\right)\right)^6$; 2) $\left(4e^{-\frac{\pi}{5}j}\right)^{10}$; 3) $\left(\sqrt{3}+j\right)^2$; 4) $\left(3e^{-\frac{\pi}{4}j}\right)^{12}$.

Задача 4. Найти все значения корня:1) $\sqrt[3]{1+j}$; 2) $\sqrt[4]{-j}$; 3) $\sqrt{2j}$.

Задача 5. Изобразить на комплексной плоскости C множество точек, удовлетворяющих следующим условиям:

1) $|z| = 2$; 2) $\arg z = \dfrac{\pi}{3}$; 3) $0 \le \mathrm{Im}\,z < 1{,}5$; 4) Re z > 1.

Задача 6. Даны матрицы:

1) $A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -8 & 4 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$. Найти $C = A\cdot B + 5\cdot B$.

2) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -9 \end{pmatrix}$. Найти $C = 2A\cdot B - A$.

Задача 7. Исследовать систему на совместность и в случае совместности решить ее:

1. методом Гаусса;

2. по формулам Крамера;

3. с помощью обратной матрицы.

1) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -1, \\ x_2 + 2x_3 = -3, \\ 3x_1 + 2x_2 = 4. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 5. \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 7. \end{cases}$

Задача 8. Решить однородные системы линейных уравнений**:**

1) $\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 2x_3 = 0; \\ 2x_1 + 4x_2 - 6x_3 = 0; \\ x_1 - 2x_2 + 8x_3 = 0. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 4x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ 4x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 + 3x_2 = 0. \end{cases}$

Приложение 2

УЧЕБНЫЕ МАТЕРИАЛЫ

Задача 1. Для данных комплексных чисел записать:

1. $\mathrm{Re}\,z$; 2. $\mathrm{Im}\,z$; 3. $\overline{z}$; 4. Изобразить на комплексной плоскости z и $\overline{z}$; 5. $|z|$;

6. $\arg z$; 7. Представить комплексные числа в тригонометрической форме;

8. Представить комплексные числа в показательной форме.

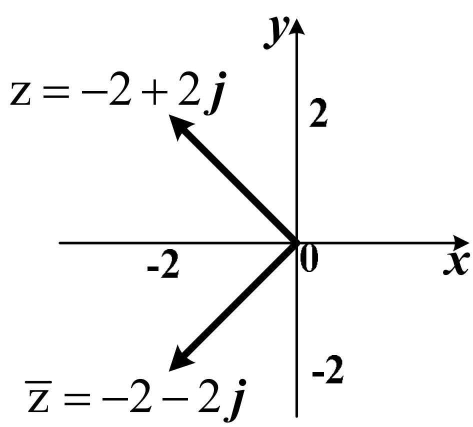
1) $z_1 = -2 + 2j$; 2) $z_2 = \sqrt{3} - 3j$; 3) $z_3 = j$.

Решение.

1) $z_1 = -2 + 2j$;

1. $\mathrm{Re}\,z_1 = -2$; 2. $\mathrm{Im}\,z_1 = 2$; 3. $\overline{z}_1 = -2 - 2j$;

4.



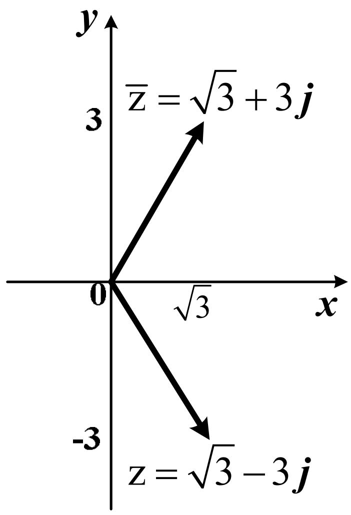
5. $|z_1| = 2\sqrt{2}$; 6. $\arg z_1 = \mathrm{arctg}\left(\dfrac{2}{-2}\right) + \pi = -\dfrac{\pi}{4} + \pi = \dfrac{3\pi}{4}$;

7. $z_1=-2+2j=2\sqrt{2}\cdot\left(\cos\frac{3\pi}{4}+j\cdot\sin\frac{3\pi}{4}\right)$; 8. $z_1=-2+2j=2\sqrt{2}\cdot e^{\frac{3\pi}{4}j}$.

2) $z_2=\sqrt{3}-3j$;

1. $\operatorname{Re} z_2=\sqrt{3}$; 2. $\operatorname{Im} z_2=-3$; 3. $\overline{z}_2=\sqrt{3}+3j$;

4.



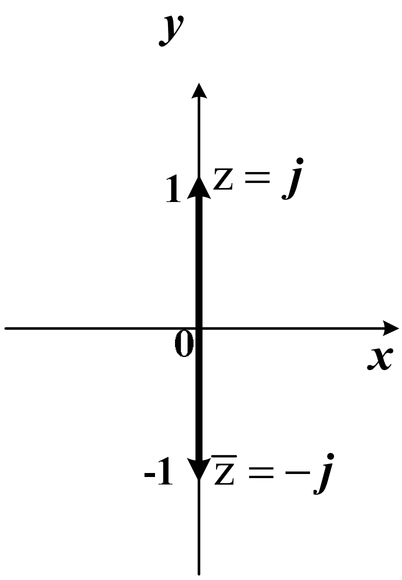
5. $|z_2|=2\sqrt{3}$; 6. $\arg z=-\frac{\pi}{3}$;

7. $z_2=\sqrt{3}-3j=2\sqrt{3}\cdot\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+j\cdot\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$; 8. $z_2=\sqrt{3}-3j=2\sqrt{3}\cdot e^{\left(-\frac{\pi}{3}\right)j}$.

3) $z_3=j$;

1. $\operatorname{Re} z_3=0$; 2. $\operatorname{Im} z_3=1$; 3. $\overline{z}_3=-j$;

4.



5. $\left|z_3\right| = 1$;   6. $\arg z_3 = \dfrac{\pi}{2}$;

7. $z_3 = j = \left(\cos\dfrac{\pi}{2} + j\cdot\sin\dfrac{\pi}{2}\right)$;   8. $z_3 = j = e^{\frac{\pi}{2}j}$.

Задача 2. Вычислить: 1) $\dfrac{5-3j}{1-j} - 4 + 2j$;   2) $2 - 3j + \dfrac{4}{1-2j}$.

Решение.

1) $\dfrac{5-3j}{1-j} - 4 + 2j = 3j$;   2) $2 - 3j + \dfrac{4}{1-2j} = 2{,}8 - 1{,}4j$.

Задача 3. Возвести в степень комплексное число:

1) $\left(2\cdot\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + j\sin\dfrac{\pi}{3}\right)\right)^6$;   2) $\left(4e^{-\frac{\pi}{5}j}\right)^{10}$;   3) $\left(\sqrt{3} + j\right)^2$;   4) $\left(3e^{-\frac{\pi}{4}j}\right)^{12}$.

Решение.

1) $\left(2\cdot\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + j\cdot\sin\dfrac{\pi}{3}\right)\right)^6 = 64\left(\cos 2\pi + j\cdot\sin 2\pi\right) = 64$;

2) $\left(4e^{-\frac{\pi}{5}j}\right)^{10} = 4^{10}\cdot e^{-2\pi j} = 4^{10}$;

3) $\left(\sqrt{3}+j\right)^2=\left(2\cdot\left(\cos\frac{\pi}{6}+j\cdot\sin\frac{\pi}{6}\right)\right)^2=4\left(\frac{1}{2}+j\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2+2\sqrt{3}\cdot j$;

4) $\left(3e^{-\frac{\pi}{4}j}\right)^{12}=3^{12}e^{-3\pi j}=3^{12}\cos 3\pi=-3^{12}$.

Задача 4. Найти все значения корня: 1) $\sqrt[3]{1+j}$; 2) $\sqrt[4]{-j}$; 3) $\sqrt{2j}$.

Решение.

1) $\sqrt[3]{1+j}$;

$$1+j=\sqrt{2}\cdot\left(\cos\frac{\pi}{4}+j\cdot\sin\frac{\pi}{4}\right);$$

$$\sqrt[3]{1+j}=\sqrt[3]{\sqrt{2}\cdot\left(\cos\frac{\pi}{4}+j\cdot\sin\frac{\pi}{4}\right)}=\sqrt[6]{2}\cdot\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4}+2\pi k}{3}+j\cdot\sin\frac{\frac{\pi}{4}+2\pi k}{3}\right),\quad k=0,1,2.$$

$k=0$, $\sqrt[6]{2}\cdot\left(\cos\frac{\pi}{12}+j\cdot\sin\frac{\pi}{12}\right)=1{,}12\cdot\left(0{,}97+j\cdot 0{,}26\right)$;

$k=1$, $\sqrt[6]{2}\cdot\left(\cos\frac{3\pi}{4}+j\cdot\sin\frac{3\pi}{4}\right)=\sqrt[6]{2}\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+j\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+j\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$;

$k=2$, $\sqrt[6]{2}\cdot\left(\cos\frac{17\pi}{12}+j\cdot\sin\frac{17\pi}{12}\right)=\sqrt[6]{2}\cdot\left(\cos\frac{7\pi}{12}-j\cdot\sin\frac{7\pi}{12}\right)=1{,}12\cdot\left(0{,}97-j\cdot 0{,}26\right)$.

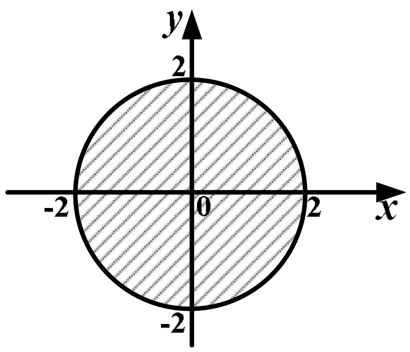
Задача 5. Изобразить на комплексной плоскости C множество точек, удовлетворяющих следующим условиям:

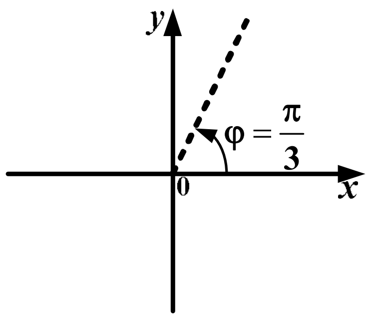
1) $|z|=2$; 2) $\arg z=\frac{\pi}{3}$; 3) $0\le \operatorname{Im} z<1{,}5$; 4) Re z > 1.

Решение.

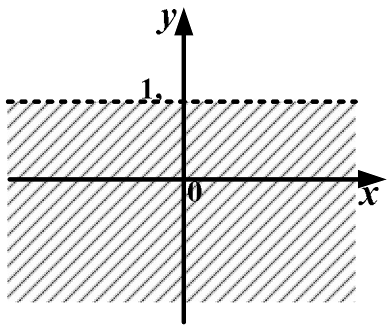
1) $|z|=2$;

2) $\arg z=\frac{\pi}{3}$

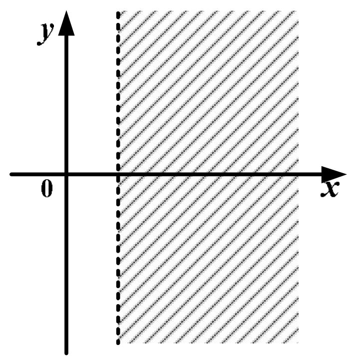




3) $0 \le \operatorname{Im} z < 1{,}5$



4) Re z > 1.



Задача 6. Даны матрицы:

1) $A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -8 & 4 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$. Найти $C = A \cdot B + 5 \cdot B$.

2) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -9 \end{pmatrix}$. Найти $C = 2A \cdot B - A$.

Решение.

1) $A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -8 & 4 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$;

$A_{2\times 2} \cdot B_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -8 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 8 & -40 \end{pmatrix}$; $5 \cdot B = 5 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 10 \\ 10 & -30 \end{pmatrix}$;

$$C = A\cdot B + 5\cdot B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 8 & -40 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 10 \\ 10 & -30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 10 \\ 18 & -70 \end{pmatrix}.$$

2) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -9 \end{pmatrix}$. Ответ: $C = 2A\cdot B - A = \begin{pmatrix} -7 & 44 \\ 24 & -157 \end{pmatrix}$.

Задача 7. Исследовать систему на совместность и в случае совместности решить ее:

1. методом Гаусса;

2. по формулам Крамера;

3. с помощью обратной матрицы.

1) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -1, \\ x_2 + 2x_3 = -3, \\ 3x_1 + 2x_2 = 4. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 5. \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 7. \end{cases}$

Решение.

1) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -1, \\ x_2 + 2x_3 = -3, \\ 3x_1 + 2x_2 = 4. \end{cases}$

1. методом Гаусса;

Запишем расширенную матрицу системы и приведем ее к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований:

I. Прямой ход:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & 0 & 4 \end{array}\right)_{III + I\cdot(-3)} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & -4 & -9 & 7 \end{array}\right)_{III + II\cdot(4)} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -5 \end{array}\right).$$

$n = r(A) = r(A|B) = 3$ – система совместна и имеет единственное решение;

II. Обратный ход:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -1, \\ x_2 + 2x_3 = -3, \\ -x_3 = -5. \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = -1 + 26 - 15, \\ x_2 = -3 - 10, \\ x_3 = 5. \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 10, \\ x_2 = -13, \\ x_3 = 5. \end{cases}$$

2. по формулам Крамера;

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -1; \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -3 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -10; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & 2 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 13; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -5.$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-10}{-1} = 10; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{13}{-1} = -13; \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-5}{-1} = 5.$$

3. с помощью обратной матрицы;

$$\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \quad \mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}; \quad \mathrm{B} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Определитель отличен от нуля, значит, система имеет единственное решение.

Найдем обратную матрицу A^{-1}:

$$\det \mathrm{A} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0;$$

Найдем алгебраические дополнения к элементам матрицы A:

$$\mathrm{A}_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4; \quad \mathrm{A}_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 6; \quad \mathrm{A}_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -3;$$

$$\mathrm{A}_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 6; \quad \mathrm{A}_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -9; \quad \mathrm{A}_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4;$$

$$\mathrm{A}_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1; \quad \mathrm{A}_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2; \quad \mathrm{A}_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

$$\grave{A}^* = \begin{pmatrix} -4 & 6 & -3 \\ 6 & -9 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}; \quad \left(\grave{A}^*\right)^{T} = \begin{pmatrix} -4 & 6 & 1 \\ 6 & -9 & -2 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix}; \quad A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \left(\grave{A}^*\right)^{\grave{O}};$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-1} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 6 & 1 \\ 6 & -9 & -2 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -6 & -1 \\ -6 & 9 & 2 \\ 3 & -4 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 4 & -6 & -1 \\ -6 & 9 & 2 \\ 3 & -4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -13 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $x_1 = 10$, $x_2 = -13$, $x_3 = 5$.

Задача 8. Решить однородные системы линейных уравнений:

1) $\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 2x_3 = 0; \\ 2x_1 + 4x_2 - 6x_3 = 0; \\ x_1 - 2x_2 + 8x_3 = 0. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 4x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ 4x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 + 3x_2 = 0. \end{cases}$

Решение.

2) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 4x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

I. Прямой ход:

Запишем расширенную матрицу системы и делаем шаги исключений.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -11 & -1 & 0 \\ 0 & -11 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -11 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

$r(A) = r(A|B) = n = 3$.

Система имеет единственное тривиальное решение: $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

Ответ: $(0;0;0)$.