

Методика оценки обучающихся на занятии

На занятии проводится проверка наличия необходимой учебно-методической литературы. В течение 10-15 минут преподаватель проводит опрос по основным вопросам данной темы занятия, которые должны быть доведены до них заранее. Может проводиться также опрос по вопросам, сформулированным самими студентами.

Провести устный опрос с целью проверки их подготовки к занятию и усвоения материала предыдущей лекции можно по следующим вопросам:

1. Понятие системы линейных алгебраических уравнений.
2. Понятие решения системы линейных алгебраических уравнений.
3. Определение совместной и несовместной системы.
4. Достаточное условие совместности системы.
5. Определение однородной и неоднородной системы.
6. Формулы Крамера.
7. Алгоритм решения систем линейных уравнений с помощью обратной матрицы.

Для письменного опроса разрабатываются варианты летучек.

Методические рекомендации по отработке учебных вопросов

Решение систем линейных уравнений по формулам Крамера

Все задачи на данном занятии решаются у доски под руководством преподавателя с исчерпывающими комментариями и теоретическими обоснованиями.

В задаче 1 отрабатывается умение находить решение системы линейных уравнений по формулам Крамера.

Решение систем линейных уравнений с помощью обратной матрицы

В задаче 1 также отрабатывается умение находить решение системы линейных уравнений с помощью обратной матрицы.

Методические рекомендации по проведению заключительной части

За 5 мин. до окончания занятия преподаватель даёт команду на завершение работы на рабочих местах.

Подвести итоги занятия:

кратко напомнить: наименование темы и занятия; отработанные на занятии вопросы, цели занятия и оценить степень их достижения;

отметить лучших курсантов, активных и пассивных, слабоуспевающих, а также характерные ошибки и недостатки в работе. Указать способы устранения этих ошибок (недостатков);

ответить на возникшие вопросы.

Приложение 1

Занятие

Решение систем линейных уравнений

Задача 1. Решить данные системы уравнений по формулам Крамера и с помощью обратной матрицы:

$$1) \begin{cases} x_1 - x_2 = -1, \\ 2x_1 + x_2 = 7. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 9, \\ 7x_1 + 8x_2 = -6. \end{cases} \quad 3) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 15, \\ 7x_1 + 8x_2 + 9x_3 = 24. \end{cases} \quad 4)$$

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -7, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 14, \\ -x_1 - x_2 + 5x_3 = -18. \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3, \\ 2x_1 + 6x_2 + 4x_3 = 6, \\ 3x_1 + 10x_2 + 8x_3 = 21. \end{cases} \quad 6) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 8, \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 19, \\ 7x_1 + 8x_2 = 1. \end{cases} \quad 7) \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1, \\ 6x_1 + 5x_2 + 4x_3 = -2, \\ 9x_1 + 8x_2 + 7x_3 = 3. \end{cases}$$

$$8) \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = -8, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = -3, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = -1. \end{cases}$$

Дополнительные задачи:

Задача 1. Решить данные системы уравнений по формулам Крамера и с помощью обратной матрицы:

$$1) \begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + x_3 = 1, \\ 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 2, \\ 7x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 3. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + x_3 = 1, \\ -3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 3, \\ 5x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 2. \end{cases} \quad 3) \begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 2, \\ 5x_1 - 2x_2 - x_3 = 1, \\ -4x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 3. \end{cases}$$

Приложение 2

Задача 1. Решить данные системы уравнений по формулам Крамера и с помощью обратной матрицы:

$$1) \begin{cases} x_1 - x_2 = -1, \\ 2x_1 + x_2 = 7. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 9, \\ 7x_1 + 8x_2 = -6. \end{cases} \quad 3) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 15, \\ 7x_1 + 8x_2 + 9x_3 = 24. \end{cases} \quad 4)$$

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -7, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 14, \\ -x_1 - x_2 + 5x_3 = -18. \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3, \\ 2x_1 + 6x_2 + 4x_3 = 6, \\ 3x_1 + 10x_2 + 8x_3 = 21. \end{cases} \quad 6) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 8, \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 19, \\ 7x_1 + 8x_2 = 1. \end{cases} \quad 7) \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1, \\ 6x_1 + 5x_2 + 4x_3 = -2, \\ 9x_1 + 8x_2 + 7x_3 = 3. \end{cases}$$

$$8) \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = -8, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = -3, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = -1. \end{cases}$$

Решение.

$$1) \begin{cases} x_1 - x_2 = -1, \\ 2x_1 + x_2 = 7. \end{cases} \quad \text{Решим систему уравнений методом Крамера:}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - (-1) \cdot 2 = 3; \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 1 - (-1) \cdot 7 = 6;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 1 \cdot 7 - (-1) \cdot 2 = 9; \quad x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 2; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 3.$$

Решим систему уравнений методом обратной матрицы:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}; \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Найдем обратную матрицу A^{-1} :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - (-1) \cdot 2 = 3. \text{ Система имеет единственное решение,}$$

которое найдем по формуле: $X = A^{-1} \cdot B$.

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot 1 = 1; \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot 2 = -2;$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot (-1) = 1; \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot 1 = 1.$$

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad (A^*)^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}; \quad A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot (A^*)^T;$$

$$A^{-1} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

$$\text{Сделаем проверку: } A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Находим матрицу X :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Решения системы: $x_1 = 2, x_2 = 3$.

Как видно, результат решения системы уравнений методом Крамера совпадает с результатом, полученным матричным методом.

Ответ: $x_1 = 2, x_2 = 3$.

$$2) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 9, \\ 7x_1 + 8x_2 = -6. \end{cases} \text{ Решим систему уравнений методом Крамера:}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 27;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 9 & 5 & 6 \\ -6 & 8 & 0 \end{vmatrix} = 6 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 9 & 6 \\ -6 & 0 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 9 & 5 \\ -6 & 8 \end{vmatrix} = -54;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 4 & 9 & 6 \\ 7 & -6 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 9 & 6 \\ -6 & 0 \end{vmatrix} - 6 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 4 & 9 \\ 7 & -6 \end{vmatrix} = 27;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 4 & 5 & 9 \\ 7 & 8 & -6 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 9 \\ 8 & -6 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 9 \\ 7 & -6 \end{vmatrix} + 6 \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 54.$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -2; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 1; \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = 2.$$

Решим систему уравнений методом обратной матрицы:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

Найдем обратную матрицу A^{-1} :

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 27 \neq 0.$$

$\det A \neq 0$, следовательно, обратная матрица существует.

Найдем алгебраические дополнения к элементам матрицы A :

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} = -48; \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} = 42; \quad A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -3;$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} = 24; \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} = -21; \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 6;$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -3; \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 6; \quad A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -3.$$

$$\dot{A}^* = \begin{pmatrix} -48 & 42 & -3 \\ 24 & -21 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix}; \quad (\dot{A}^*)^T = \begin{pmatrix} -48 & 24 & -3 \\ 42 & -21 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix}; \quad A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot (\dot{A}^*)^0;$$

$$A^{-1} = \frac{1}{27} \cdot \begin{pmatrix} -48 & 24 & -3 \\ 42 & -21 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-48}{27} & \frac{24}{27} & \frac{-3}{27} \\ \frac{42}{27} & \frac{-21}{27} & \frac{6}{27} \\ \frac{-3}{27} & \frac{6}{27} & \frac{-3}{27} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-16}{9} & \frac{8}{9} & \frac{-1}{9} \\ \frac{14}{9} & \frac{-7}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{-1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{-1}{9} \end{pmatrix}.$$

Сделаем проверку:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{-16}{9} & \frac{8}{9} & \frac{-1}{9} \\ \frac{14}{9} & \frac{-7}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{-1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{-1}{9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Находим матрицу X:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} \frac{-16}{9} & \frac{8}{9} & \frac{-1}{9} \\ \frac{14}{9} & \frac{-7}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{-1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{-1}{9} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Решения системы: $x_1 = -2, x_2 = 1, x_3 = 2$.

Как видно, результат решения системы уравнений методом Крамера совпадает с результатом, полученным матричным методом.

Ответ: $x_1 = -2, x_2 = 1, x_3 = 2$.

$$3) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 15, \\ 7x_1 + 8x_2 + 9x_3 = 24. \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 0.$$

Так как $\Delta = 0$, то система не может быть решена ни по формулам Крамера, ни с помощью обратной матрицы.

Ответ: по формулам Крамера и с помощью обратной матрицы систему решить нельзя.

$$4) \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -7, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 14, \\ -x_1 - x_2 + 5x_3 = -18. \end{cases} \quad \text{Ответ: } x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = -3.$$

$$5) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3, \\ 2x_1 + 6x_2 + 4x_3 = 6, \\ 3x_1 + 10x_2 + 8x_3 = 21. \end{cases} \quad \text{Ответ: } x_1 = -7, x_2 = 4, x_3 = 4.$$

$$6) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 8, \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 19, \\ 7x_1 + 8x_2 = 1. \end{cases} \quad \text{Ответ: } x_1 = -1, x_2 = 1, x_3 = 3.$$

$$7) \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1, \\ 6x_1 + 5x_2 + 4x_3 = -2, \\ 9x_1 + 8x_2 + 7x_3 = 3. \end{cases} \quad \text{Ответ: по формулам Крамера и с помощью}$$

обратной матрицы систему решить нельзя.

$$8) \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = -8, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = -3, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = -1. \end{cases} \quad \text{Ответ: } x_1 = -4, x_2 = 1, x_3 = 2.$$