

Методика оценки обучающихся на занятии

На занятии проводится проверка наличия необходимой учебно-методической литературы. В течение 10-15 минут преподаватель проводит опрос по основным вопросам данной темы занятия, которые должны быть доведены до них заранее. Может проводиться также опрос по вопросам, сформулированным самими студентами.

Провести устный опрос с целью проверки их подготовки к занятию и усвоения материала предыдущего занятия можно по следующим вопросам:

1. Какая матрица называется единичной?
2. Какая матрица называется обратной по отношению к данной?
3. Что является необходимым и достаточным условием для существования обратной матрицы?
4. Сформулировать правило нахождения обратной матрицы.

Для письменного опроса разрабатываются варианты летучек.

Методические рекомендации по отработке учебных вопросов

Нахождение обратных матриц

Все задачи на данном занятии решаются у доски под руководством преподавателя с исчерпывающими комментариями и теоретическими обоснованиями.

В задаче 1 отрабатывается умение находить матрицу, обратную к данной.

Нахождение ранга матрицы

В задаче 2 отрабатывается умение находить ранг матрицы.

Методические рекомендации по проведению заключительной части

За 5 мин. до окончания занятия преподаватель даёт команду на завершение работы на рабочих местах.

Подвести итоги занятия:

кратко напомнить: наименование темы и занятия; отработанные на занятии вопросы, цели занятия и оценить степень их достижения;

отметить лучших студентов, активных и пассивных, слабоуспевающих, а также характерные ошибки и недостатки в работе. Указать способы устранения этих ошибок (недостатков);

ответить на возникшие вопросы.

Выдать задание на самостоятельную работу обучающимся:

Задача 1. Найти матрицу, обратную к матрицам:

$$1) \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 2 & -7 & 1 \end{pmatrix}; \quad 2) \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 5 & 4 & 2 \\ -6 & 3 & 1 \end{pmatrix}; \quad 3) \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \\ -6 & 3 & 1 \end{pmatrix}; \quad 4) \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \\ -3 & 2 & 3 \end{pmatrix}; \quad 5) \begin{pmatrix} 4 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \\ -3 & -2 & 0 \end{pmatrix};$$

$$6) \begin{pmatrix} -2 & 5 & -1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 5 & 4 & 4 \end{pmatrix}; \quad 7) \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 4 & -3 & 4 \end{pmatrix}; \quad 8) \begin{pmatrix} 3 & -1 & -3 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Задача 2. Найти ранги матриц:

$$1) \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & -5 & 1 & -3 \end{pmatrix}; \quad 2) \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & -4 & 2 \\ 5 & -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}; \quad 3) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 4 & 8 & 11 \end{pmatrix}; \quad 4) \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & -7 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}; \quad 5) \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & -6 \end{pmatrix};$$

$$6) \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & -3 \end{pmatrix}; \quad 7) \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & -6 \end{pmatrix}; \quad 8) \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & -3 \end{pmatrix}; \quad 9) \begin{pmatrix} -1 & 4 & 4 \\ 5 & 2 & 4 \\ -2 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Приложение 2

УЧЕБНЫЕ МАТЕРИАЛЫ

Задача 1. Найти матрицу, обратную к матрицам:

$$1) \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 2 & -7 & 1 \end{pmatrix}; \quad 2) \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 5 & 4 & 2 \\ -6 & 3 & 1 \end{pmatrix}; \quad 3) \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \\ -6 & 3 & 1 \end{pmatrix}; \quad 4) \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \\ -3 & 2 & 3 \end{pmatrix}; \quad 5) \begin{pmatrix} 4 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \\ -3 & -2 & 0 \end{pmatrix};$$

$$6) \begin{pmatrix} -2 & 5 & -1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 5 & 4 & 4 \end{pmatrix}; \quad 7) \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 4 & -3 & 4 \end{pmatrix}; \quad 8) \begin{pmatrix} 3 & -1 & -3 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Решение.

$$1) \text{ Найдем } \det A = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 2 & -7 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -7 & 1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & -7 \end{vmatrix} = 67 \neq 0,$$

$\det A \neq 0$, следовательно, обратная матрица существует.

2) Найдем алгебраические дополнения к элементам матрицы A:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -7 & 1 \end{vmatrix} = 4 \cdot 1 - 5 \cdot (-7) = 39;$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -(2 \cdot 1 - 5 \cdot 2) = 8;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & -7 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-7) - 4 \cdot 2 = -22;$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -7 & 1 \end{vmatrix} = -(2 \cdot 1 - 3 \cdot (-7)) = -23;$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 - 3 \cdot 2 = -3;$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -7 \end{vmatrix} = -(3 \cdot (-7) - 2 \cdot 2) = 25;$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - 3 \cdot 4 = -2;$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -(3 \cdot 5 - 3 \cdot 2) = -9;$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 2 = 8.$$

$$\dot{A}^* = \begin{pmatrix} 39 & 8 & -22 \\ -23 & -3 & 25 \\ -2 & -9 & 8 \end{pmatrix}$$

3) Запишем присоединенную (союзную) матрицу:

$$(\dot{A}^*)^T = \begin{pmatrix} 39 & -23 & -2 \\ 8 & -3 & -9 \\ -22 & 25 & 8 \end{pmatrix}$$

4) Найдем обратную матрицу:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot (\dot{A}^*)^T$$

$$A^{-1} = \frac{1}{67} \cdot \begin{pmatrix} 39 & -23 & -2 \\ 8 & -3 & -9 \\ -22 & 25 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{39}{67} & -\frac{23}{67} & -\frac{2}{67} \\ \frac{8}{67} & -\frac{3}{67} & -\frac{9}{67} \\ -\frac{22}{67} & \frac{25}{67} & \frac{8}{67} \end{pmatrix}$$

5) Сделаем проверку:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 2 & -7 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{39}{67} & -\frac{23}{67} & -\frac{2}{67} \\ \frac{8}{67} & -\frac{3}{67} & -\frac{9}{67} \\ -\frac{22}{67} & \frac{25}{67} & \frac{8}{67} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$2) \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 5 & 4 & 2 \\ -6 & 3 & 1 \end{pmatrix}; \text{ Ответ: } \begin{pmatrix} -\frac{2}{62} & \frac{6}{62} & -\frac{6}{62} \\ -\frac{17}{62} & \frac{20}{62} & \frac{11}{62} \\ \frac{39}{62} & -\frac{24}{62} & -\frac{7}{62} \end{pmatrix}.$$

$$3) \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \\ -6 & 3 & 1 \end{pmatrix}; \text{ Ответ: } \begin{pmatrix} -\frac{1}{33} & \frac{1}{11} & -\frac{4}{33} \\ -\frac{16}{33} & \frac{5}{11} & -\frac{2}{33} \\ \frac{14}{11} & -\frac{9}{11} & \frac{3}{62} \end{pmatrix}.$$

$$4) \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \\ -3 & 2 & 3 \end{pmatrix}; \text{ Ответ: } \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{3}{4} & \frac{3}{8} & \frac{11}{40} \\ \frac{3}{10} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{10} \end{pmatrix}.$$

$$5) \begin{pmatrix} 4 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \\ -3 & -2 & 0 \end{pmatrix}; \text{ Ответ: } \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ -3 & -6 & -8 \\ 0,5 & 0,5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задача 2. Найти ранги матриц:

$$1) \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & -5 & 1 & -3 \end{pmatrix}; 2) \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & -4 & 2 \\ 5 & -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}; 3) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 4 & 8 & 11 \end{pmatrix}; 4) \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & -7 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}; 5) \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & -6 \end{pmatrix};$$

$$6) \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & -3 \end{pmatrix}; 7) \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & -6 \end{pmatrix}; 8) \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & -3 \end{pmatrix}; 9) \begin{pmatrix} -1 & 4 & 4 \\ 5 & 2 & 4 \\ -2 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Решение.

$$\begin{aligned} 1) & \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & -5 & 1 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 5 & 6 \\ 1 & -5 & 1 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & -3 & -1 & -4 \\ 0 & 6 & 2 & 8 \end{pmatrix} \sim \\ & \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & -3 & -1 & -4 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & -3 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \text{ Ранг матрицы равен 2.} \end{aligned}$$

$$2) \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & -4 & 2 \\ 5 & -2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 8 & -13 & -1 \\ 0 & 8 & -13 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 8 & -13 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

Ранг матрицы равен 2.

$$3) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 4 & 8 & 11 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \text{ Ранг матрицы равен 2.}$$

$$4) \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & -7 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}; \text{ Ответ: Ранг матрицы равен 3.}$$

$$5) \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & -6 \end{pmatrix}; \text{ Ответ: Ранг матрицы равен 3.}$$

$$6) \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & -3 \end{pmatrix}; \text{ Ответ: Ранг матрицы равен 3.}$$

$$7) \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & -6 \end{pmatrix}; \text{ Ответ: Ранг матрицы равен 3.}$$

$$8) \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & -3 \end{pmatrix}; \text{ Ответ: Ранг матрицы равен 3.}$$

$$9) \begin{pmatrix} -1 & 4 & 4 \\ 5 & 2 & 4 \\ -2 & 3 & 5 \end{pmatrix}; \text{ Ответ: Ранг матрицы равен 3.}$$