

Провести устный опрос с целью проверки их подготовки к занятию и усвоения материала предыдущей лекции можно по следующим вопросам:

1. Понятие системы линейных алгебраических уравнений.
2. Понятие решения системы линейных алгебраических уравнений.
3. Определение совместной и несовместной системы.
4. Достаточное условие совместной системы.
5. Определение однородной и неоднородной системы.
6. Определение ранга матрицы.
7. Алгоритм решения неоднородной системы линейных уравнений методом Гаусса.
8. Алгоритм решения однородной системы линейных уравнений.

Для письменного опроса разрабатываются варианты ленточек.

Методические рекомендации по отработке учебных вопросов

Решение неоднородных систем линейных уравнений методом Гаусса

Все задачи на данном занятии решаются у доски под руководством преподавателя с исчерпывающими комментариями и теоретическими обоснованиями.

При решении задачи 1 рассматриваются случаи:

- 1) система не имеет решений;
- 2) система имеет единственное решение;
- 3) система имеет бесконечное множество решений.

Исследование и решение однородных систем уравнений

При решении задачи 2 рассматриваются случаи:

- 1) система имеет единственное нулевое решение;
- 2) система имеет бесконечное множество решений.

Методические рекомендации по проведению заключительной части

За 5 мин. до окончания занятия преподаватель даёт команду на завершение работы на рабочих местах.

Подвести итоги занятия:

кратко напомнить: наименование темы и занятия; отработанные на занятии вопросы, цели занятия и оценить степень их достижения;

отметить лучших курсантов, активных и пассивных, слабоуспевающих, а также характерные ошибки и недостатки в работе. Указать способы устранения этих ошибок (недостатков);

ответить на возникшие вопросы.

Занятие Исследование и решение системы линейных уравнений
методом Гаусса.

Задача 1. Решить системы линейных уравнений методом Гаусса:

$$1) \begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = -4; \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0; \\ -2x_1 - 2x_3 = 16. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -4; \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0; \\ -2x_1 - 2x_3 = 3. \end{cases} \quad 3) \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -4; \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0; \\ -2x_1 - 2x_3 = 16. \end{cases}$$

Задача 2. Решить однородные системы линейных уравнений:

$$1) \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0; \\ 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 0; \\ 4x_1 - x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ 4x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 + 3x_2 = 0. \end{cases}$$

Дополнительные задачи:

Задача 1. Решить системы линейных уравнений:

$$1) \begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 9; \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 4; \\ 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 18. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3; \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 2; \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 5. \end{cases} \quad 3) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0; \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 0; \\ 7x_1 + 8x_2 + 10x_3 = 0. \end{cases}$$

УЧЕБНЫЕ МАТЕРИАЛЫ

Задача 1. Решить системы линейных уравнений методом Гаусса:

$$1) \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -4; \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0; \\ -2x_1 - 2x_3 = 3. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = -4; \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0; \\ -2x_1 - 2x_3 = 16. \end{cases} \quad 3) \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -4; \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0; \\ -2x_1 - 2x_3 = 16. \end{cases}$$

Решение.

$$1) \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -4, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ -2x_1 - 2x_3 = 3. \end{cases}$$

I. Прямой ход:

Запишем расширенную матрицу системы и делаем шаги исключений.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 3 \end{array} \right) \square \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & -4 & -5 \end{array} \right) \square \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -13 \end{array} \right)$$

$r(A) = 2 \neq 3 = r(A|B)$ – система несовместна (не имеет решения);

II. Обратный ход:

$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = -13$ – не имеет смысла.

Ответ: система не имеет решения.

$$2) \begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = -4, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ -2x_1 - 2x_3 = 16. \end{cases}$$

I. Прямой ход:

Запишем расширенную матрицу системы и делаем шаги исключений.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -4 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 16 \end{array} \right) \square \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \end{array} \right) \square \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \end{array} \right) \square \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{array} \right) \square$$

$n = r(A) = r(A|B) = 3$, система совместна и определена (имеет единственное решение);

II. Обратный ход:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = -4, \\ x_2 = 4, \\ -4x_3 = 0. \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = -8, \\ x_2 = 4, \\ x_3 = 0. \end{cases}$$

Ответ: $(-8; 4; 0)$.

$$3) \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -4, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ -2x_1 - 2x_3 = 16. \end{cases}$$

I. Прямой ход:

Запишем расширенную матрицу системы и делаем шаги исключений.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 16 \end{array} \right) \square \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & -4 & 8 \end{array} \right) \square \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$r(A) = r(A|B) = 2 < 3 = n$, система совместна и неопределенна (имеет бесконечно много решений);

II. Обратный ход:

$r(A) = 2$ – количество главных переменных;

$n - r(A) = 3 - 2 = 1$ – количество свободных переменных;

Пусть x_1, x_2 – главные переменные, x_3 – свободная переменная.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -4, \\ x_2 - 2x_3 = 4, \end{cases} \begin{cases} x_1 + x_2 = x_3 - 4, \\ x_2 = 2x_3 + 4, \end{cases} \begin{cases} x_1 + 2x_3 + 4 = x_3 - 4, \\ x_1 = -x_3 - 8, \end{cases}$$

Пусть $x_3 = t$, тогда $x_1 = -t - 8$, $x_2 = 2t + 4$, $x_3 = t$ – общее решение системы.

Ответ: $(-t - 8; 2t + 4; t)$.

Задача 2. Решить однородные системы линейных уравнений:

$$1) \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0; \\ 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 0; \\ 4x_1 - x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ 4x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 + 3x_2 = 0. \end{cases}$$

Решение.

$$1) \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0; \\ 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 0; \\ 4x_1 - x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$$

I. Прямой ход:

Запишем расширенную матрицу системы и делаем шаги исключений.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 8 & 3 & -6 & 0 \\ 4 & -1 & 3 & 0 \end{array} \right) \square \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & 7 & 0 \end{array} \right) \square \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{array} \right).$$

$$r(A) = r(A|B) = n = 3.$$

Система имеет единственное тривиальное решение: $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

Ответ: $(0; 0; 0)$.

$$2) \begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ 4x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 + 3x_2 = 0. \end{cases}$$

I. Прямой ход:

Запишем расширенную матрицу системы и делаем шаги исключений.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 2 & 0 \\ 4 & -3 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \end{array} \right) \square \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \end{array} \right) \square \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -15 & 3 & 0 \\ 0 & -10 & 2 & 0 \end{array} \right) \square \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & 0 \end{array} \right) \square \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

$$r(A) = r(A|B) = 2 \neq 3 = n.$$

Однородная система линейных уравнений неопределенна (имеет бесконечно много решений).

$r(A) = 2$ – количество главных переменных;

$n - r(A) = 3 - 2 = 1$ – количество свободных переменных;

Пусть x_1, x_2 – главные (базисные) переменные, x_3 – свободная переменная;

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 0, \\ -5x_2 + x_3 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = -\frac{3}{5}x_3, \\ x_2 = \frac{1}{5}x_3. \end{cases}$$

Пусть $x_3 = t$, тогда $x_1 = -\frac{3}{5}t$, $x_2 = \frac{1}{5}t$, $x_3 = t$ – общее решение системы.

Ответ: $\left(-\frac{3}{5}t; \frac{1}{5}t; t\right)$.

Дополнительные задачи:

Задача 1. Решить системы линейных уравнений:

$$1) \begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 9; \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 4; \\ 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 18. \end{cases} \quad \text{Ответ: } (2; 3; 5).$$

$$2) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3; \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 2; \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 5. \end{cases} \quad \text{Ответ: система не имеет решения.}$$

$$3) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0; \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 0; \\ 7x_1 + 8x_2 + 10x_3 = 0. \end{cases} \quad \text{Ответ: } (0; 0; 0).$$