ОБРАЗЕЦ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ № 21

Выделив кратные множители, разложите многочлен $f(x) = x^5 - x^3 - 3x - 2$ *на неприводимые множители над полем действительных чисел* R*:*

Решение.

1) Запускаем алгоритм отделения кратных множителей.
Шаг 1. Полагаем $d_0(x) = f(x)$ и находим f ¢(x) $= 5x^4 - 3x^2 - 8x - 3$.
Воспользуемся алгоритмом Евклида для нахождения $d_1(x) = (f(x);$ f ¢(x)).

$$\begin{array}{r|l}
x^5 - x^3 - 4x^2 - 3x - 2 & 5x^4 - 3x^2 - 8x - 3 \\
\hline
5x^5 - 5x^3 - 20x^2 - 15x - 10 & \\
-\ 5x^5 - 3x^3 - 8x^2 - 3x & \\
\hline
-2x^3 - 12x^2 - 12x - 10 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
5x^4 - 3x^2 - 8x - 3 & x^3 + 6x^2 + 6x + 5 = r_1(x) \\
-\ 5x^4 + 30x^3 + 30x^2 + 25 & \\
\hline
-30x^3 - 33x^2 - 33x - 3 & \\
\hline
10x^3 + 11x^2 + 11x + 1 & \\
10x^3 + 60x^2 + 60x + 50 & \\
\hline
-49x^2 - 49x - 48 & \\
x^2 + x + 1 = r_2(x) &
\end{array}$$

Снова делим делитель на остаток:

$$\begin{array}{r|l}
x^3 + 6x^2 + 6x + 5 & x^2 + x + 1 \\
\cline{2-2}
-\ x^3 + x^2 + x & x + 5 \\
\hline
5x^2 + 5x + 5 & \\
5x^2 + 5x + 5 & \\
\hline
0 = r_3(x) &
\end{array}$$

Следовательно,

$$d_1(x) = (f(x); f¢(x)) = x^2 + x + 1.$$

Отсюда получаем $d_2(x) = (d_1(x);$ $d_1'(x)$)Легко видеть, что $d_2(x) = 1$. Шаг 2.

$$D_1(x) = \frac{d_0(x)}{d_1(x)} = \frac{x^5 - x^3 - 4x^2 - 3x - 2}{x^2 + x + 1} = x^3 - x^2 - x - 2.$$

Находим путем деления «уголком»

$$D_2(x) = \frac{d_1(x)}{d_2(x)} = x^2 + x + 1$$

и полагаем $D_3(x) = 1$.

Следовательно, $f(x) = (x - 2)\times(x^2 + x + 1)^2$.

Анализируя результат, мы заключаем, что получим разложение данного многочлена в произведение неприводимых множителей над полем действительных чисел R, что нам нужно было сделать.

Ответ: $f(x) = (x - 2)\times(x^2 + x + 1)^2$.