ОБРАЗЕЦ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ № 17

Найдите линейную форму НОД многочленов f(x) и g(x) наиболее удобным способом, если

а) $f(x) = x^4 + 3x^3 - x^2 - 4x - 3,\ g(x) = 3x^3 + 10x^2 + 2x - 3.$

б) $f(x) = x^5 + x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1,\ g(x) = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 5x + 2.$

Решение.

Приведем два способа решения данной задачи.

А) С помощью *алгоритма Евклида*.

Применим к многочленам f(x) и g(x) алгоритм Евклида.

Заметим, что здесь произвол, состоящий в умножении многочленов на постоянные множители, возможный при нахождении наибольшего общего делителя, допускать нельзя, так как здесь мы будем использовать и частные, которые при указанном произволе могут искажаться.

Линейная форма НОД многочленов f(x) и g(x) имеет вид:

$$f(x) \times U(x) + g(x) \times V(x) = d(x),$$

где d(x) – это НОД многочленов f(x) и g(x), а U(x) и V(x) таковы, что степень многочлена U(x) меньше степени многочлена g(x), а степень V(x) меньше степени f(x).

Наша задача состоит в нахождении многочленов U(x) и V(x), удовлетворяющих озвученному выше условию.

Сначала находим НОД многочленов f(x) и g(x):

$$\begin{array}{r|l}
x^4+3x^3-x^2-4x-3 & 3x^3+10x^2+2x-3 \\ \cline{2-2}
-\ x^4+\frac{10}{3}x^3+\frac{2}{3}x^2-x & \frac{1}{3}x-\frac{1}{9} \\ \cline{1-1}
-\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{3}x^2-3x-3 & \\
-\ -\frac{1}{3}x^3-\frac{10}{9}x^2-\frac{2}{9}x+\frac{1}{3} & \\ \cline{1-1}
-\frac{5}{9}x^2-\frac{25}{9}x-\frac{10}{3} &
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
3x^3+10x^2+2x-3 & -\frac{5}{9}x^2-\frac{25}{9}x-\frac{10}{3} \\ \cline{2-2}
-\ 3x^3+15x^2+18x & \\ \cline{1-1}
-5x^2-16x-3 & \\
-\ -5x^2-25x- & \\ \cline{1-1}
9x+27 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
-\frac{5}{9}x^2-\frac{25}{9}x-\frac{10}{3} & 9x+27 \\ \cline{2-2}
-\ -\frac{5}{9}x^2-\frac{5}{3}x & -\frac{5}{81}x-\frac{10}{81} \\ \cline{1-1}
-\frac{10}{9}x-\frac{10}{3} & \\
-\ -\frac{10}{9}x-\frac{10}{3} & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

Следовательно, (f(x); g(x)) = 9x + 27 = 9 × (x + 3), т.е. (f(x); g(x)) = x + 3.

Из этого получаем:

$$f(x) = g(x)\cdot\left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{9}\right) + \left(-\frac{5}{9}x^2 - \frac{25}{9}x - \frac{10}{3}\right);$$
$$g(x) = \left(-\frac{5}{9}x^2 - \frac{25}{9}x - \frac{10}{3}\right)\cdot\left(-\frac{27}{5}x + 9\right) + (9x + 27);$$
$$-\frac{5}{9}x^2 - \frac{25}{9}x - \frac{10}{3} = (9x + 27)\cdot\left(-\frac{5}{81}x - \frac{10}{81}\right) + 0.$$

Из последнего равенства находим:

$$9x + 27 = g(x) - \left(\frac{5}{9}x^2 - \frac{25}{9}x - \frac{10}{3}\right)\cdot\left(-\frac{27}{5}x + 9\right), \text{или}$$
$$x + 3 = \frac{1}{9}g(x) - \frac{1}{9}\left(-\frac{5}{9}x^2 - \frac{25}{9}x - \frac{10}{3}\right)\cdot\left(-\frac{27}{5}x + 9\right).$$

Из первого равенства находим:

$$-\frac{5}{9}x^2 - \frac{25}{9}x - \frac{10}{3} = f(x) - g(x)\cdot\left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{9}\right).$$

Подставим это в предыдущее равенство и получим:

$$x + 3 = \frac{1}{9}g(x) - \frac{1}{9}\cdot\left(f(x) - g(x)\cdot\left(-\frac{1}{3}x - \frac{1}{9}\right)\right)\cdot\left(-\frac{27}{5}x + 9\right) =$$
$$= \frac{1}{9}g(x) - \frac{1}{9}f(x)\cdot\left(-\frac{27}{5}x + 9\right) + \frac{1}{9}g(x)\left(-\frac{1}{3}x - \frac{1}{9}\right)\left(-\frac{27}{5}x + 9\right) =$$
$$= f(x)\cdot\left(-\frac{1}{9}\left(-\frac{27}{5}x + 9\right)\right) + g(x)\cdot\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{9}\left(-\frac{1}{3}x - \frac{1}{9}\right)\right)\left(-\frac{27}{5}x + 9\right) =$$

Отсюда заключаем, что

$$U(x) = \frac{3}{5}x - 1,$$
$$V(x) = \frac{1}{9} + \left(-\frac{1}{3}x - \frac{1}{9}\right)\cdot\left(-\frac{3}{5}x + 1\right) = \frac{1}{9} + \frac{1}{5}x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{15}x - \frac{1}{9} =$$
$$= \frac{1}{5}x^2 - \frac{1}{15}x.$$

Значит, линейная форма НОД многочленов f(x) и g(x) имеет вид:

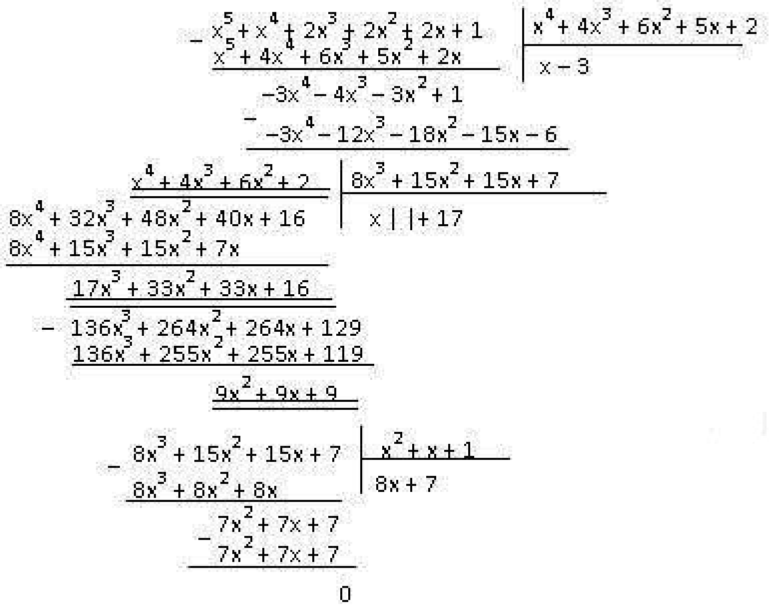
$$x + 3 = f(x)\cdot\left(\frac{3}{5}x - 1\right) + g(x)\cdot\left(-\frac{1}{5}x^2 - \frac{4}{15}x\right)$$

Ответ:

$$x + 3 = f(x)\cdot\left(\frac{3}{5}x - 1\right) + g(x)\cdot\left(-\frac{1}{5}x^2 - \frac{4}{15}x\right)$$

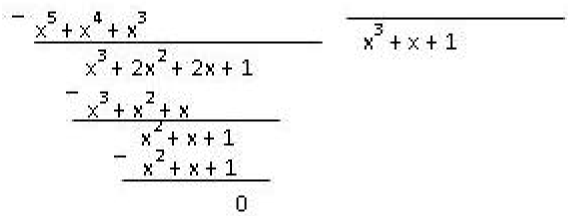
Б) С помощью *метода неопределенных коэффициентов*.

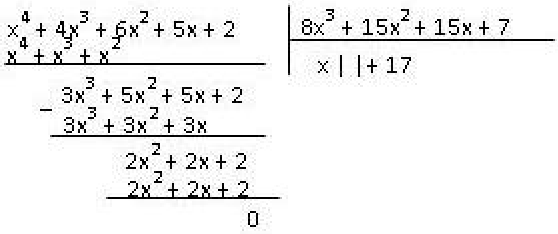
Применим к многочленам алгоритм Евклида



Следовательно $D(x) = (f(x); g(x)) = x^2 + x + 1$.

Делим теперь f(x) и g(x) на D(x), например «уголком»:





Следовательно, $f_1(x) = x^3 + x + 1$, $g_1(x) = x^2 + 3x + 2$.

Согласно теории, многочлены $f_1(x)$ и $g_1(x)$ взаимнопросты. Поэтому должно выполняться равенство: $f_1(x) \times U(x) + g_1(x) \times V(x) = 1$, при этом степень многочлена U(x) меньше степени многочлена $g_1(x)$, а степеньмногочлена V(x) меньше степени многочлена $f_1(x)$.

Имеем:

$f_1(x) = x^3 + x + 1$ – многочлен *третьей* степени, а, значит, $V(x) = Ax^2 + Bx + C$;

$g_1(x) = x^2 + 3x + 2$ – многочлен *второй* степени, поэтому $U(x) = Dx + E$.

И тогда получаем:

$(x^3 + x + 1) \times (Dx + E) + (x^2 + 3x + 2) \times (Ax^2 + Bx + C) = 1.$

Раскрываем скобки в левой части равенства:

$Dx^4 + Dx^2 + Dx + Ex^3 + Ex + E + Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + 3Ax^3 + 3Bx^2 + 3Cx + 2Ax^2 + 2Bx + 2C = 1.$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях **x** слева и справа, получаем систему линейных уравнений, которую решаем любым известным способом:

$$\begin{cases} A + D = 0, \\ 3A + B + E = 0, \\ 2A + 3B + C + D = 0, \\ 2B + 3C + D + E = 0, \\ 2C + E = 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D = -A, \\ E = 1 - 2C, \\ 3A + B + 1 - 2C = 0, \\ 2A + 3B + C - A = 0, \\ 2B + 3C - A + 1 - 2C = 0. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} D = -A, \\ E = 1 - 2C, \\ 3A + B - 2C = -1, \\ A + 3B + C = 0, \\ -A + 2B + C = -1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D = -A, \\ E = 1 - 2C, \\ 3A + B - 2C = -1, \\ A + 3B + C = 0, \\ 5B + 2C = -1. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} D = -A, \\ E = 1 - 2C, \\ B = -\frac{2}{5}C - \frac{1}{5}, \\ 3A - \frac{2}{5}C - \frac{1}{5} - 2C = -1, \\ A - \frac{6}{5}C - \frac{3}{5} + C = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D = -A, \\ E = 1 - 2C, \\ B = -\frac{2}{5}C - \frac{1}{5}, \\ 3A - \frac{12}{5}C = -\frac{4}{5}, \\ A - \frac{1}{5}C = \frac{3}{5}. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} D = -A, \\ E = 1 - 2C, \\ B = -\frac{2}{5}C - \frac{1}{5}, \\ 3A - \frac{12}{5}C = -\frac{4}{5}, \\ -3A + \frac{3}{5}C = -\frac{9}{5}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D = -A, \\ E = 1 - 2C, \\ B = -\frac{2}{5}C - \frac{1}{5}, \\ 3A - \frac{12}{5}C = -\frac{4}{5}, \\ -\frac{9}{5}C = -\frac{13}{5}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D = -\frac{8}{9}, \\ E = -\frac{17}{9}, \\ B = -\frac{7}{9}, \\ A = \frac{8}{9}, \\ C = \frac{13}{9}. \end{cases}$$

Следовательно,

$$(x^3 + x + 1) \cdot \left(-\frac{8}{9}x - \frac{17}{9}\right) + (x^2 + 3x + 2) \cdot \left(\frac{8}{9}x^2 - \frac{7}{9}x + \frac{13}{9}\right) = 1.$$

Умножим полученное равенство на $D(x) = x^2 + x + 1$, получим линейную форму НОД для многочленов $f(x)$ и $g(x)$:

$$x^2 + x + 1 = f(x) \cdot \left(-\frac{8}{9}x - \frac{17}{9}\right) + g(x) \cdot \left(\frac{8}{9}x^2 - \frac{7}{9}x + \frac{13}{9}\right).$$

Ответ: $x^2 + x + 1 = f(x) \cdot \left(-\frac{8}{9}x - \frac{17}{9}\right) + g(x) \cdot \left(\frac{8}{9}x^2 - \frac{7}{9}x + \frac{13}{9}\right).$