ОБРАЗЕЦ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ № 16

Найдите НОД многочленов $f(x)$ *и* $g(x)$ *с помощью алгоритма Евклида, зная что* $f(x) = x^6 - 7x^4 + 8x^3 - 7x + 7$,
$g(x) = 3x^5 - 7x^3 + 3x^2 - 7$.

Решение.

<u>Решение начнем *с Замечания*1.</u>

Наибольший общий делитель многочленов находится однозначно лишь с точностью до постоянного множителя (постоянные множители, отличные от нуля, на делимость многочленов не влияют). Поэтому, можно условиться в качестве наибольшего общего делителя многочленов, брать тот, у которого старший коэффициент равен *единице*.

Так как постоянные множители не влияют на делимость многочленов, то в процессе применения *алгоритма Евклида*, во избежание громоздких вычислений с дробными числами, делимые многочлены и делители можно умножить на любые отличные от нуля числа. При этом интересующие нас остатки будут приобретать некоторые постоянные множители, что для нас не имеет значения, частные же будут «портиться», однако они нами при нахождении наибольшего общего делителя не используются.

Так, при решении нашей задачи мы видим, что при делении f(x) на g(x) сразу появятся дробные числа. Чтобы избежать этого, умножим f(x) на 3 и многочлен 3f(x) разделим на g(x):

$$
\begin{array}{r|l}
-\;3x^6 - 21x^4 + 24x^3 - 21x + 21 & \underline{3x^5 - 7x^3 + 3x^2 - 7} \\
\underline{3x^6 - 7x^4 + 3x^3 - 7x\qquad} & x \\
\underline{\underline{-14x^4 + 21x^3 - 14x + 21}} & \\
2x^4 - 3x^3 + 2x - 3 = d_1(x) &
\end{array}
$$

Здесь полученный остаток мы умножим на $\left(-\frac{1}{7}\right)$ и полученный многочлен $d_1(x)$ записали под двойной чертой.

Теперь многочлен $2 \times g(x)$ разделим на $d_1(x)$:

$$
\begin{array}{r|l}
-\;6x^5 - 14x^3 + 6x^2 - 14 & \underline{2x^4 - 3x^3 + 2x - 3} \\
\underline{6x^5 - 9x^4 + 6x^2 - 9x\qquad} & 3x \;||\; + 9 \\
\underline{\underline{9x^4 - 14x^3 + 9x - 14}} & \\
-\;18x^4 - 28x^3 + 18x - 28 & \\
\underline{18x^4 - 27x^3 + 18x - 27} & \\
\underline{\underline{-x^3 - 1}} & \\
x^3 + 1 &
\end{array}
$$

Здесь мы промежуточный остаток умножим на 2 (в результате частное стало неверным – в знак этого члены частного отделены двойной вертикальной чертой) и последний остаток умножили на (–1).

Теперь надо многочлен ($2x^4 – 3x^3 + 2x – 3$) разделить на ($x^3 + 1$):

$$
\begin{array}{r|l}
2x^4 - 3x^3 + 2x - 3 & x^3 + 1 \\ \cline{2-2}
\underline{2x^4 + 2x \qquad\quad} & 2x - 3 \\
-3x^3 - 3 & \\
-\;\underline{-3x^3 - 3} & \\
0 &
\end{array}
$$

Здесь остаток равен нулю.

Значит, $(f(x); g(x)) = x^3 + 1$.

Ответ: $(f(x); g(x)) = x^3 + 1$.

<u>Замечание 2.</u>

Найдем с помощью алгоритма Евклида наибольший общий делитель многочленов $f(x) = x^4 – 2x^3 – 4x^2 + 4x – 3$ и $g(x) = 2x^3 – 5x^2– 4x + 3$, пользуясь сделанным выше замечанием 1 и не приводя подробных объяснений.

$$
\begin{array}{r|l}
\underline{\underline{x^4 - 2x^3 - x^2 + 4x - 3}} & 2x^4 - 3x^3 + 2x - 3 \\ \cline{2-2}
-\;2x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 8x - 6 & x \;||\; + 1 \\
\underline{2x^4 - 5x^3 - 4x^2 + 3x \qquad} & \\
\underline{\underline{x^3 - 4x^2 + 5x - 6}} & \\
-\;2x^3 - 8x^2 + 10x - 12 & \\
\underline{2x^3 - 5x^2 - 4x + 3} & \\
-3x^2 + 14x - 15 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|l}
\underline{\underline{2x^3 - 5x^2 - 4x + 3}} & -3x^2 + 14x - 15 \\ \cline{2-2}
-\;6x^3 - 15x^2 - 12x + 9 & -2x \;||\; - 13 \\
6x^3 - 28x^2 + 30x \qquad & \\
\underline{\underline{13x^2 - 42x + 9}} & \\
-\;39x^2 - 126x + 27 & \\
\underline{39x^2 - 182x + 195} & \\
\underline{\underline{56x - 168}} & \\
x - 3 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|l}
-3x^2 + 14x - 15 & x - 3 \\ \cline{2-2}
-\;\underline{-3x^2 + 9x \qquad} & -3x + 5 \\
5x - 15 & \\
\underline{5x - 15} & \\
0 &
\end{array}
$$

Отсюда заключаем, что $(f(x); g(x) = x – 3$.

Ответ: $(f(x); g(x) = x – 3$.