

Случайные величины

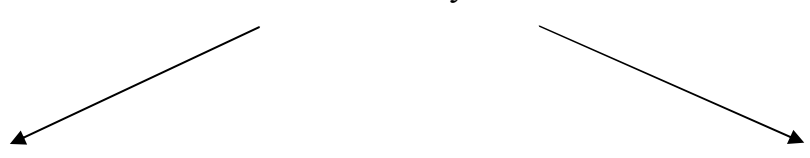
Определение 1. Величину называют случайной, если в результате испытания она примет лишь одно возможное значение, заранее не известное и зависящее от случайных причин.

Каждой случайной величине соответствует множество значений, которые она может принимать.

Например, число мальчиков среди 100 новорожденных — это случайная величина, которая может принимать целые значения от 0 до 100.

Далее будем обозначать случайные величины строчными буквами, а их возможные значения — прописными буквами.

Различают два вида случайных величин.



Случайная величина, принимающая отдельные возможные значения с определенными вероятностями, называется **дискретной** случайной величиной.

Непрерывной называется случайная величина, которая может принимать все значения из некоторого промежутка.

1. Дискретные случайные величины

1. Табличный закон распределения

Определение. Соответствие между отдельными возможными значениями и их вероятностями называется законом распределения дискретной случайной величины.

Рассмотрим закон распределения дискретной случайной величины в виде соответствующей таблицы, состоящей из двух строк; первая указывает возможные значения, а вторая — их вероятности:

$$\begin{array}{ccccccc} X & x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ P & p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{array}$$

Поскольку в одном испытании случайная величина принимает только одно возможное значение, то события $X = x_1, X = x_2, \dots, X = x_n$ образуют полную группу, то есть сумма их вероятностей равна единице:

$$p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$$

Если множество возможных значений X дискретной случайной величины бесконечно, то соответствующий ряд вероятностей сходится и его сумма равна единице:

$$p_1 + p_2 + \dots + p_n + \dots = 1$$

Пример. Вероятностный прогноз для величины X — процентного изменения стоимости акций по отношению к их текущему курсу в течение шести месяцев — дан в виде закона распределения

$$\begin{array}{ccccccc} X & 5 & 10 & 15 & 20 & 25 & 30 \\ P & 0,1 & 0,1 & 0,2 & 0,3 & 0,2 & 0,1 \end{array}$$

Найти вероятность того, что покупка акций будет более выгодна, чем помещение денег на банковский депозит под 3 % за месяц сроком на 6 месяцев.

Решение.

Прирост суммы на банковском депозите при условии 3 % в месяц составит через 6 месяцев $((1,03)^6 - 1) \cdot 100 \% = 19,4 \%$.

Вероятность того, что покупка акции выгоднее банковского депозита, определяется суммой вероятностей, соответствующих более высокому росту курса акций:

$$P(X > 19,4) = p_4 + p_5 + p_6 = 0,3 + 0,2 + 0,1 = 0,6.$$

2. Биномиальное распределение

Пусть производится n независимых испытаний, и в каждом из них событие A может либо появиться, либо не появиться. Пусть также вероятность p появления события A в каждом испытании постоянна.

В качестве дискретной случайной величины X рассмотрим число появления события A в этих n испытаниях.

Очевидно, что $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2, \dots, x_{n+1} = n$.

Вероятности этих возможных значений k даются формулой Бернулли:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k},$$

где $q = 1 - p$ — вероятность противоположного события (не появление события A в одном испытании).

Эта формула представляет собой аналитическую форму закона распределения случайной величины (числа появления события A в n независимых испытаниях), которое называется биномиальным; правая часть представляет собой общий член разложения бинома Ньютона.

Используя эту формулу можно составить таблицу биномиального распределения.

Можно показать, что сумма всех вероятностей биномиального распределения равна единице, то есть

$$\sum_{k=0}^n C_n^k p^k q^{n-k} = p^n + np^{n-1}q + \dots + C_n^k p^k q^{n-k} + \dots + q^n = 1$$

Пример. Банк выдает 5 кредитов. Вероятность не возврата кредита равна 0,2 для каждого из заемщиков. Составить таблицу закона распределения количества заемщиков, не вернувших кредит по окончании срока кредитования.

Решение. Примем за A событие не возврата кредита. Так как заемщики действуют независимо, то выдачу кредитов можно считать за $n = 5$ независимых событий. Вероятность не возврата k кредитов из 5

описывается биномиальным распределением $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$, где $p = 0,2$, $q = 0,8$, k принимает значения от нуля до 5. Придавая последовательно в формуле $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$ k значения от нуля до 5 и используя формулы для расчета C_n^k , получаем:

X	5	4	3	2	1	0
P	0,00032	0,0064	0,0512	0,2048	0,4096	0,32768

3. Распределение Пуассона

Пусть в каждом из n производимых испытаний вероятность появления события A равна p . Для случая малых значений p и больших значений n используется асимптотическая формула Пуассона. Эта формула выведена при важном допущении, что произведение np является постоянной величиной, то есть $np = \lambda$. Тогда вероятность того, что событие A наступит ровно k раз, дается формулой, которая представляет собой закон распределения Пуассона вероятностей массовых и редких событий

$$P_n(k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

Пример. На базу отправлено 10 000 изделий. Вероятность того, что изделие в пути получит повреждение, равна 0.0003. Найти вероятность того, что на базу придут 4 поврежденных изделия.

Решение. По условию задачи $n = 10\,000$, $p = 0,0003$, $k = 4$. Находим λ , а затем и искомую вероятность:

$$\lambda = np = 10000 \cdot 0,0003 = 3$$

$$P_{10000}(4) = \frac{3^4 e^{-3}}{4!} = 0,168$$

4. Многоугольник распределения случайной величины.

Для наглядности закон распределения дискретной случайной величины изображают и графически; в прямоугольной системе координат на плоскости строят точки $(x_i; p_i)$ и соединяют их последовательно отрезками прямых. Получающаяся при этом ломаная линия называется многоугольником распределения случайной величины.

Пример. Дискретная случайная величина X задается законом

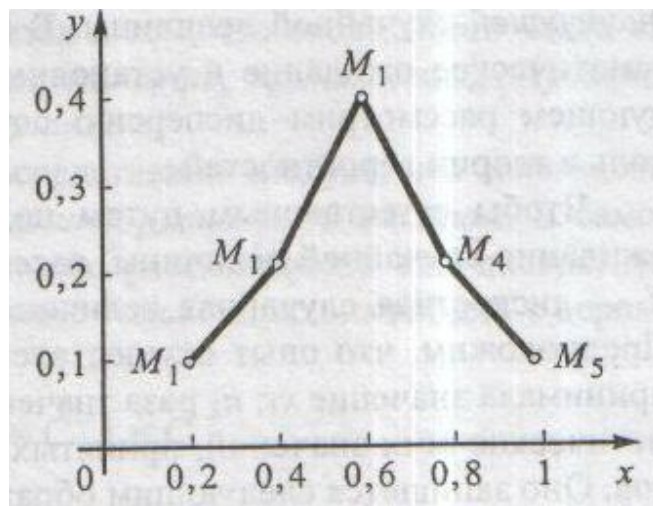
X	0,2	0,4	0,6	0,8	1
P	0,1	0,2	0,4	p_4	0,1

Чему равна вероятность $p_4 = P(X = 0,8)$? Построить многоугольник распределения.

Решение. Так как $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 = 1$, то

$$p_4 = 1 - (p_1 + p_2 + p_3 + p_5) = 1 - (0,1 + 0,2 + 0,4 + 0,1) = 0,2. \text{ Следовательно, } p_4 = 0,2$$

Для построения многоугольника распределения выберем прямоугольную систему координат, в этой системе построим точки $M_i(x_i, p_i)$ и соединим их последовательно отрезками прямых.



Упражнения

1. Дискретная случайная величина X имеет закон распределения

X	3	4	5	6	7
P	p_1	0,15	p_3	0,25	0,35

Найти вероятности $p_1 = P(X = 3)$ и $p_3 = P(X = 5)$, если известно, что p_3 в 4 раза больше p_1 .

2. Подбрасываются две симметричные монеты, подсчитывается число гербов на обеих верхних сторонах монет. Рассматривается дискретная случайная величина X — число выпадения гербов на обеих монетах. Записать закон распределения случайной величины X .

3. Подбрасываются два игральных кубика, подсчитывается число очков, выпавших на обеих верхних гранях. Найти закон распределения дискретной случайной величины X — суммы выпавших очков на двух игровых костях.

4. Из коробки с пятью деталями, среди которых четыре стандартных, наудачу взяты три детали. Составить закон распределения дискретной случайной величины X — количества стандартных деталей среди отобранных.

5. Книга издана тиражом 100 тыс. экземпляров. Вероятность брака в экземпляре равна 0,0001. Найти вероятность того, что тираж содержит ровно 5 бракованных книг.

2. Числовые характеристики дискретных случайных величин

Установленный закон распределения полностью характеризует случайную величину. Однако часто используются числовые характеристики случайной величины, которые дают некоторое осредненное описание случайной величины, получаемое на основе закона ее распределения.

1. Математическое ожидание дискретной случайной величины.

Пусть случайная величина X имеет закон распределения

$$\begin{array}{ccccccc} X & x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ P & p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{array}$$

Определение. Математическим ожиданием, дискретной случайной величины называется сумма произведений всех ее возможных значений на их вероятности:

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n = \sum_{i=1}^n x_i p_i$$

Из этого определения следует, что математическое ожидание есть некоторая постоянная (неслучайная) величина. Вероятностный же смысл математического ожидания состоит в том, что оно приближенно равно (в особенности для большого числа испытаний) среднему арифметическому значению случайной величины. Это хорошо видно в случае, когда вероятности всех возможных значений дискретной случайной величины равны $p_i = p = \frac{1}{n}$ в этой формуле.

Пример. Банк выдает 5 кредитов. Вероятность не возврата кредита равна 0,2 для каждого из заемщиков. Найти математическое ожидание не возврата кредитов.

Решение. Воспользуемся итоговой таблицей распределения дискретной случайной величины.

X	5	4	3	2	1	0
P	0,00032	0,0064	0,0512	0,2048	0,4096	0,32768

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n = \sum_{i=1}^n x_i p_i$$

$$M(X) = 5 \cdot 0,00032 + 4 \cdot 0,0064 + 3 \cdot 0,0512 + 2 \cdot 0,2048 + 1 \cdot 0,4096 + 0 \cdot 0,32768 = 1.$$

Основные свойства математического ожидания:

1. Математическое ожидание постоянной величины C равно C :

$$M(C) = C.$$

2. Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания:

$$M(CX) = CM(X).$$

3. Математическое ожидание суммы случайных величин равно сумме их математических ожиданий.

4. Математическое ожидание произведения независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий

Пример. Пусть ежедневные расходы на обслуживание и рекламу автомобилей в автосалоне составляют в среднем 120 тыс. денежных единиц, а число продаж X автомашин в течение дня подчиняется закону распределения

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
P	0,25	0,2	0,1	0,1	0,1	0,1	0,05	0,05	0,025	0,025

Найти математическое ожидание ежедневной прибыли при цене машины в 150 тыс. денежных единиц.

Решение. Ежедневная прибыль подсчитывается по формуле:

$$\Pi = (150X - 120)$$

Искомая характеристика $M(\Pi)$ находится с использованием указанных ранее свойств математического ожидания (в тыс. ден. ед.):

$$M(\Pi) = M(150X - 120) = 150M(X) - 120 = 150 \cdot 2,675 - 120 = 281,25$$

2. Дисперсия дискретной случайной величины.

Различные случайные величины могут иметь одно и то же математическое ожидание.

Пример. Найти математическое ожидание случайных величин X и Y , заданных следующими законами распределения:

X	- 0,04	0,06
P_X	0,6	0,4

Y	- 300	100
P_Y	0,25	0,75

Математические ожидания одинаковы:

$$M(X) = M(Y) = 0$$

Однако характер распределения этих величин различен. Величина X принимает значения, мало отличающиеся от ее математического ожидания, а значения величины Y сильно отличаются от своего математического ожидания.

Таких примеров можно привести множество. Например, в двух учреждениях с различным соотношением низкооплачиваемых и высокооплачиваемых работников может оказаться одна и та же средняя заработная плата или два различных исправных прибора для измерения одной и той же физической величины при многократных измерениях могут давать одно и то же среднее значение, что вовсе не означает их одинаковой точности.

Подобного рода примеры убеждают нас в том, что необходимо ввести еще одну числовую характеристику, которая бы позволяла измерять степень разброса или, как еще называют, степень рассеивания значений, принимаемых случайной величиной, вокруг ее математического ожидания.

Определение. Разность между случайной величиной и ее математическим ожиданием называется отклонением: $X - M(X)$.

Определение. Математическое ожидание квадрата отклонения называется дисперсией, или рассеянием

$$D(X) = M(X - M(X))^2$$

Формула дисперсии в развернутом виде:

$$D(X) = (x_1 - M(X))^2 p_1 + (x_2 - M(X))^2 p_2 + \dots + (x_n - M(X))^2 p_n.$$

При вычислении дисперсии удобно воспользоваться формулой, которая непосредственно выводится из предыдущей формулы:

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2$$

Пример. Пусть ежедневные расходы на обслуживание и рекламу автомобилей в автосалоне составляют в среднем 120 тыс. денежных единиц, а число продаж X автомашин в течение дня подчиняется закону распределения

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
P	0,25	0,2	0,1	0,1	0,1	0,1	0,05	0,05	0,025	0,025

Найти дисперсию ежедневной продажи числа автомашин.

Решение.

1) Закон распределения случайной величины X^2 имеет вид

X^2	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81
P	0,25	0,2	0,1	0,1	0,1	0,1	0,05	0,05	0,025	0,025

2) Математическое ожидание $M(X^2)$ подсчитывается из этой таблицы:

$$M(X^2) = 0 \cdot 0,25 + 1 \cdot 0,2 + 4 \cdot 0,1 + 9 \cdot 0,1 + 16 \cdot 0,1 + 25 \cdot 0,1 + 36 \cdot 0,05 + 49 \cdot 0,05 + 64 \cdot 0,025 + 81 \cdot 0,025 = 13,475.$$

3) Математическое ожидание $M(X) = 2,675$.

4) Согласно формуле $D(X) = M(X^2) - (M(X))^2$, получаем искомую величину дисперсии:

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2 = 13,475 - 7,156 = 6,319.$$

Основные свойства дисперсии.

1. Дисперсия постоянной величины C равна нулю:

$$D(C) = 0.$$

2. Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возводя его в квадрат:

$$D(CX) = C^2 D(X)$$

3. Дисперсия суммы независимых случайных величин равна сумме их дисперсий.

Из свойств следуют важные выводы:

- $D(X + C) = D(X)$, где C — постоянная величина.
- Дисперсия числа появления события A в n независимых испытаниях с вероятностью появления p в каждом из них этого события вычисляется по формуле $D(X) = np(1 - p) = npq$
- Для случайной величины, распределенной по закону Пуассона, математическое ожидание и дисперсия равны параметру λ данного распределения.

Пример. Банк выдал кредиты n разным заемщикам в размере S денежных единиц каждому под ставку ссудного процента r . Найти математическое ожидание и дисперсию прибыли банка, а также условие на ставку ссудного процента, если вероятность возврата кредита заемщиком равна p .

Решение. Поскольку заемщики между собой не связаны, то можно полагать, что мы имеем n независимых испытаний. Вероятность утери кредита для банка в каждом испытании равна $q = 1 - p$.

Пусть X — число заемщиков, возвративших кредит со ссудными процентом, тогда прибыль банка определяется формулой

$$\Pi = \left(1 + \frac{r}{100}\right) SX - nS.$$

X является случайной величиной с биномиальным законом распределения. Тогда математическое ожидание прибыли равно:

$$M(\Pi) = \left(1 + \frac{r}{100}\right) S \cdot M(X) - nS = \left(1 + \frac{r}{100}\right) Snp - nS = Sn\left(\frac{rp}{100} - q\right)$$

Поскольку выдача кредита имеет смысл лишь при положительном математическом ожидании прибыли (положительная средняя величина прибыли), то из условия $M(\Pi) > 0$ вытекает условие на ставку ссудного процента

$$r > \frac{100q}{p} \text{ или } r > \frac{100(1-p)}{p}$$

Дисперсия прибыли банка:

$$D(\Pi) = D((1 + \frac{r}{100})SX - nS) = (1 + \frac{r}{100})^2 S^2 npq .$$

Пример. Найти дисперсию случайной величины $Z=8X-5Y+7$, если известно, что случайные величины X и Y независимы и $D(X) = 1,5$, $D(Y) = 1$.

Решение. Используя свойства дисперсии, найдем

$$D(Z) = 8^2 D(X) + 5^2 D(Y) + 0 = 64 \cdot 1,5 + 25 \cdot 1 = 121.$$

3. Среднее квадратическое отклонение

Определение. Средним квадратическим отклонением случайной величины X (стандартом) называется квадратный корень из ее дисперсии

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$$

В случае суммы взаимно независимых случайных величин справедлива формула

$$\sigma(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = \sqrt{\sigma^2(X_1) + \sigma^2(X_2) + \dots + \sigma^2(X_n)}$$

Пример. В условиях предыдущего примера найти математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение прибыли при:

$$n = 1000,$$

$$p = 0,8,$$

$$S = 100 \text{ тысяч денежных единиц}$$

$$r = 30 \%$$

Решение. Ставка ссудного процента удовлетворяет условию, чтобы математическое ожидание прибыли было положительным: $30 > \frac{100(1-0,8)}{0,8}$.

Математическое ожидание прибыли

$$M(\Pi) = Sn(\frac{rp}{100} - q) = 100 \cdot 1000(\frac{30 \cdot 0,8}{100} - 0,2) = 4 \text{ млн. ден. ед.}$$

Среднее квадратическое отклонение прибыли

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = (1 + \frac{r}{100}) S \sqrt{npq} = 1,3 \cdot 100 \sqrt{1000 \cdot 0,8 \cdot 0,2} = 1644,38 \text{ тыс. ден. ед.}$$

Упражнения

1. В лотерее имеется 1000 билетов. Из них выигрышных: 10 по 500 рублей, 50 по 50 рублей, 100 по 10 рублей и 150 по 1 рублю. Найти математическое ожидание выигрыша на один билет.

Ответ: 8,65 руб.

2. Дискретная случайная величина задана рядом распределения.

X	- 1	0	1	2
p	0,2	0,1	0,3	0,4

Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

Ответ: 0,9; 1,29; 1,14.

3. Производится три независимых выстрела по цели. Вероятности попадания при разных выстрелах одинаковы и равны $p = 0,9$. Найти математическое ожидание числа попаданий.

Ответ: 2,7

4*. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,01. Какова вероятность того, что число попаданий при 200 выстрелах составит не менее 5 и не более 10?

Ответ: $\approx 0,053$

5. В группе из 21 студентов 5 девушек. Из этой группы наудачу отбирается 3 студента. Составить закон распределения дискретной случайной величины X – числа девушек из отобранных студентов. Найти математическое ожидание.

Ответ: $\approx 0,7142$

6. Найти дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X , заданной законом распределения

X	- 5	2	3	4
p	0,4	0,3	0,1	0,2

Ответ: 3,9

7. Найти дисперсию дискретной случайной величины X — числа отказов элемента некоторого устройства в 10 независимых опытах, если вероятность отказа элемента в каждом опыте равна 0,9.

Ответ: 0,9

8. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение числа очков, выпадающих при бросании игральной кости.

Ответ: $3,5$, $\frac{35}{12}$, $\sqrt{\frac{35}{12}}$

9. Найти математическое ожидание дискретной случайной величины, закон распределения которой задан таблицей

X	3	4	5	6	7
p	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

Ответ: 5

10. Известны математические ожидания двух случайных величин X и Y : $M(X) = 3$, $M(Y) = 2$. Найти математическое ожидание суммы и разности этих величин.

Ответ: 5 и 1.

11. Известны математические ожидания двух случайных величин X и Y : $M(X) = 4$, $M(Y) = 5$. Найти математическое ожидания величин $Z = 2(X+3Y)(2X-Y)$.

Ответ: 5 и 1.

12. Дискретная случайная величина X задана рядом распределения.

X	0	1	2
p	0,3	0,5	0,2

Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

Ответ: 0,9; 0,49; 1,14.

13. Симметричная монета подбрасывается 4 раза. Случайная величина X — число выпадений герба при этих подбрасываниях. Найдите числовые характеристики случайной величины: математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

Ответ: 2, 1, 1.

3. Коэффициент корреляции

Определение 1. *Корреляционным моментом* случайных величин X и Y (или ковариацией) называется математическое ожидание произведений их отклонений

$$\mu_{xy} = \text{Cov}(X, Y) = M\{[X - M(X)][Y - M(Y)]\}$$

Корреляционный момент служит для описания связи между случайными величинами X и Y . Из свойств математического ожидания легко убедиться в том, что μ_{xy} можно записать в следующем виде:

$$\mu_{xy} = M(XY) - M(X)M(Y)$$

Для непосредственного вычисления используется формула:

$$\mu_{xy} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_i y_j p_{ij} - M(X)M(Y)$$

Следствие: корреляционный момент двух независимых случайных величин равен нулю. Если корреляционный момент μ_{xy} не равен нулю, то величины X и Y являются зависимыми.

Определение 2. *Коэффициентом корреляции* случайных величин X и Y называется отношение их корреляционного момента к произведению средних квадратических отклонений этих величин:

$$r_{xy} = \frac{\mu_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{\mu_{xy}}{\sqrt{D(X)D(Y)}}$$

Коэффициент корреляции является безразмерным и не зависит от выбора системы измерения случайных величин, а его абсолютная величина не превосходит единицы:

$$|r_{xy}| \leq 1 \text{ или } -1 \leq r_{xy} \leq 1$$

Определение. Две случайные величины X и Y называется коррелированными, если их корреляционный момент (коэффициент корреляции) отличен от нуля; если же их корреляционный момент равен нулю, то X и Y называются некоррелированными.

Таким образом, две коррелированные случайные величины (т.е. при $|r_{xy}| \neq 0$) являются также и зависимыми. Обратное утверждение неверно. Т.е. две зависимые величины могут быть как коррелированными, так и некоррелированными.

Пример. Закон распределения дискретной двумерной величины задан таблицей:

$\begin{matrix} x \backslash y \\ y \end{matrix}$	-1	0	1
0	0,15	0,40	0,05
1	0,20	0,10	0,10

Найти коэффициент корреляции r_{xy} .

Решение. Находим законы распределения составляющих:

X	0	1
P_X	0,6	0,4

и

Y	-1	0	1
P_Y	0,35	0,50	0,15

Находим математические ожидания составляющих:

$$M(X) = 0 \cdot 0,6 + 1 \cdot 0,4 = 0,4 \quad \text{и} \quad M(Y) = -1 \cdot 0,35 + 0 \cdot 0,50 + 1 \cdot 0,15 = -0,20$$

Находим дисперсии составляющих:

$$D(X) = (0^2 \cdot 0,6 + 1^2 \cdot 0,4) - 0,4^2 = 0,24$$

$$D(Y) = ((-1)^2 \cdot 0,35 + 0^2 \cdot 0,50 + 1^2 \cdot 0,15) - (-0,20)^2 = 0,46$$

Находим $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_i y_j p_{ij}$:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_i y_j p_{ij} = -1 \cdot 0 \cdot 0,15 + 0 \cdot 0 \cdot 0,40 + 1 \cdot 0 \cdot 0,05 + (-1) \cdot 1 \cdot 0,20 + 0 \cdot 1 \cdot 0,10 + 1 \cdot 1 \cdot 0,10 = -0,10$$

Находим корреляционный момент:

$$\mu_{xy} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_i y_j p_{ij} - M(X)M(Y) = -0,10 - 0,4 \cdot (-0,20) = -0,02$$

Находим коэффициент корреляции:

$$r_{xy} = \frac{\mu_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{\mu_{xy}}{\sqrt{D(X)D(Y)}} = \frac{-0,02}{\sqrt{0,24 \cdot 0,46}} \approx -0,06$$

Ответ: $\approx -0,06$.

4. Функция и плотность распределения вероятности.

1. Функция распределения случайной величины.

Пусть X – непрерывная случайная величина, значения которой сплошь заполняют интервал $(a;b)$.

Определение. Функцией распределения случайной величины X называется функция $F(x)$, определяющая вероятность того, что X примет значение, меньшее x :

$$F(x) = P(X < x).$$

Функция распределения обладает рядом фундаментальных свойств:

1. Область значений функции распределения лежит на отрезке $[0,1]$:

$$0 \leq F(x) \leq 1.$$

2. Функция распределения является неубывающей, т. е.

$$F(x_2) \geq F(x_1) \text{ при } x_2 > x_1.$$

3. Если возможные значения случайной величины находятся на интервале $(a;b)$, то $F(x) = 0$ при $x < a$ и $F(x) = 1$ при $x > b$.

Из указанных свойств вытекают важные следствия:

1. Вероятность того, что случайная величина X принимает значения, заключенные внутри интервала $(a;b)$, равна разности значений функции распределения на концах этого интервала:

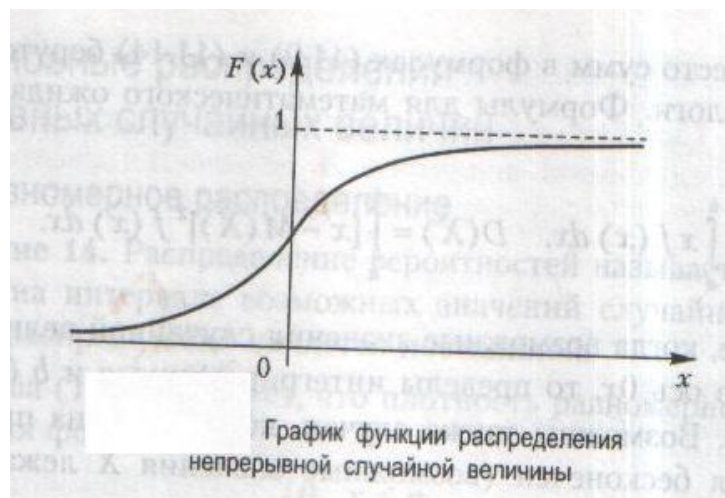
$$P(a \leq X < b) = F(b) - F(a).$$

2. Вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет одно определенное значение, равна нулю.

3. Если возможные значения непрерывной случайной величины X расположены на всей числовой оси, то справедливы следующие пределы:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$$

График функции распределения непрерывной случайной величины показан на рисунке.



2. Плотность распределения случайной величины.

Определение. Производная от функции распределения непрерывной случайной величины X называется плотностью распределения вероятностей X :

$$f(x) = F'(x).$$

Из этого определения следует, что функция распределения является первообразной для плотности распределения или неопределенным интегралом от нее. Отсюда справедливо равенство

$$P(\alpha < X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx.$$

Связь между функцией распределения и плотностью распределения вероятностей устанавливается формулой

$$F(x) = P(X < x) = \int_{-\infty}^x f(z)dz$$

Укажем основные свойства плотности распределения вероятности:

1. $f(x) > 0$.
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

Это равенство означает достоверность того события, что случайная величина X примет значение, принадлежащее интервалу $(-\infty; \infty)$.

Если все возможные значения случайной величины X лежат внутри интервала $(a; b)$,

то $\int_a^b f(x)dx = 1$.

5. Числовые характеристики непрерывных случайных величин

Определения числовых характеристик дискретных случайных величин распространяются и на непрерывные величины. Разница состоит в том, что вместо сумм в формулах берутся их интегральные аналоги. Формулы для математического ожидания и дисперсии

$$M(X) = \int_a^b x f(x)dx$$

$$D(X) = \int_a^b (x - M(X))^2 f(x)dx$$

В том случае, когда возможные значения случайной величины X заполняют всю ось абсцисс, то пределы интегрирования бесконечны: $a = -\infty$, $b = \infty$.

Возможны также случаи, когда один из пределов интегрирования бесконечен (возможные значения X лежат на полупрямой).

Среднее квадратическое отклонение непрерывной случайной величины определяется, как и прежде, по формуле:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

Для вычисления дисперсии употребляется более удобная формула, которую можно вывести:

$$D(X) = \int_a^b x^2 f(x)dx - (M(X))^2.$$

Пример. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X , заданной плотностью распределения на отрезке $[0, 1]$:

$$f(x) = 1, \quad x \in [0; 1].$$

Решение. $M(X) = \int_a^b x f(x) dx = \int_0^1 x \cdot 1 dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2}.$

$$D(X) = \int_a^b x^2 f(x) dx - (M(X))^2 = \int_0^1 x^2 \cdot 1 dx - (0,5)^2 = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 - \frac{1}{4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{\frac{1}{12}} \approx 0,289.$$

6. Основные распределения непрерывных случайных величин

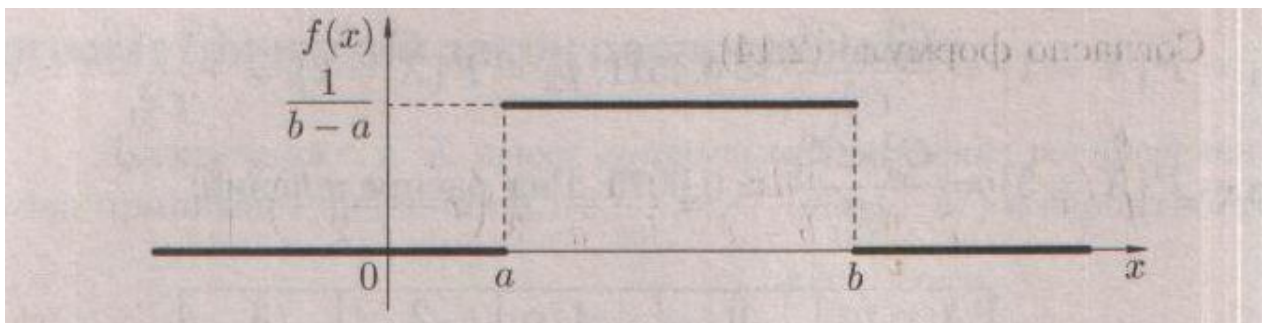
1. Равномерное распределение

Определение. Распределение вероятностей называется равномерным, если на интервале возможных значений случайной величины плотность распределения является постоянной.

Плотность равномерного распределения дается формулой

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a, \\ \frac{1}{b-a}, & a < x \leq b, \\ 0, & x > b. \end{cases}$$

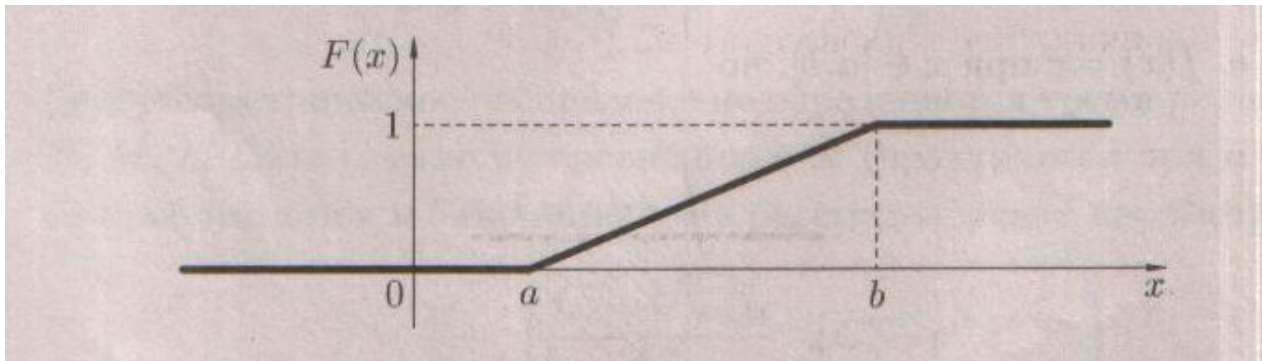
График плотности равномерного распределения приведен на рисунке.



Функция равномерного распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & a < x \leq b, \\ 1, & x > b. \end{cases}$$

График функции равномерного распределения приведен на рисунке.



Числовые характеристики:

$$M(X) = \frac{a+b}{2} \quad D(x) = \frac{(b-a)^2}{12} \quad \sigma(X) = \sqrt{D(X)}$$

Пример. Найти плотность, математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратическое отклонение случайной величины X , распределенной равномерно на интервале $(1, 5)$.

Решение. $M(X) = \frac{a+b}{2} = \frac{1+5}{2} = 3$

$$D(x) = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{(5-1)^2}{12} = \frac{16}{12} = \frac{4}{3} \approx 1,33$$

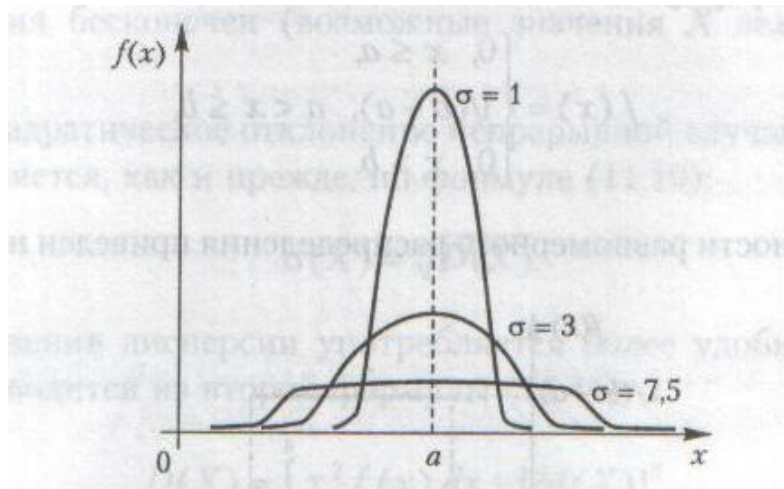
$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{1,33} \approx 1,12.$$

2. Нормальное распределение

Определение. Общим нормальным распределением вероятностей непрерывной случайной величины X называется распределение с плотностью:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\alpha)^2}{2\sigma^2}}$$

График плотности нормального распределения для разных значений σ показан на рисунке:



Нормальное распределение задается двумя параметрами: α и σ .

Определение. Нормальное распределение с параметрами $\alpha = 0$ и $\sigma = 1$ называется нормированным; его плотность

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Для случая нормированного нормального распределения функция распределения имеет вид

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(z) dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz. \quad (*)$$

Поскольку функция плотности является четной, то неопределенный интеграл от нее является нечетной, и вместо него используется функция Лапласа, часто обозначаемая

как $N(0, 1)$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz \quad (**)$$

Функции (*) и (**) табулированы.

По определениям математического ожидания и дисперсии, после выполнения соответствующих интегрирований можно вывести, что для нормального распределения справедливы формулы:

$$M(X) = \alpha, \quad D(X) = \sigma^2, \quad \sigma(X) = \sigma$$

Нормальному закону подчиняются ошибки измерений, величины износа деталей в механизмах, рост человека, ошибки стрельбы, колебания курса акций...

Вероятность попадания случайной величины на заданный участок ($a; b$) вычисляется по формуле:

$$P(a < X < b) = \Phi\left(\frac{b - \alpha}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - \alpha}{\sigma}\right)$$

В заключение приведем две важные характеристики.

Модой $Mo(X)$ называется возможное значение случайной величины X , при котором плотность распределения имеет максимум.

Медианой $Mo(X)$ называется такое возможное значение случайной величины X , что вертикальная прямая $x = Mo(X)$ делит пополам площадь, ограниченную кривой плотности распределения.

Пример. Магазин продаст мужские костюмы. По данным статистики известно, что распределение по размерам является нормальным с математическим ожиданием и средним квадратическим отклонением, равными 48 и 2 соответственно. Определить процент спроса на 50-й размер при условии разброса значений этой величины в интервале (49.51).

Решение. По условию задачи $\alpha = 48$ и $\sigma = 2$, $a = 49$, $b = 51$. Используя формулу , получаем, что вероятность спроса на 50-й размер в заданном интервале

$$P(49 < X < 51) = \Phi\left(\frac{51 - 48}{2}\right) - \Phi\left(\frac{49 - 48}{2}\right) = \Phi(1,5) - \Phi(0,5) = 0,4332 - 0,1915 = 0,2417.$$

Следовательно, спрос на 50-й размер костюмов составит около 24 %, и магазину нужно предусмотреть это в общем объеме закупки.

Упражнения:

1. Закон распределения дискретной двумерной величины задан таблицей:

$x \backslash y$	1	2	3	4
1	0,07	0,04	0,11	0,11
2	0,08	0,11	0,06	0,08
3	0,09	0,13	0,10	0,02

Проверить, зависимы ли случайные величины X и Y . Найти $cov(X, Y)$.

Ответ: случайные величины зависимы, $cov(X, Y) = -0,2145$

2. Непрерывная случайная величина X задана на всей оси абсцисс функцией распределения $F(x) = \frac{1}{2} + \frac{\arctg x}{\pi}$. Найти вероятность того, что величина X примет значение, заключенное в интервале $(0, 1)$.

Ответ: 0,25.

3. Случайная величина X задана на интервале $(0, 5)$ плотностью распределения $f(x) = \frac{2x}{25}$; вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти дисперсию X .

Ответ: $\frac{25}{18}$.

4. Найти дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X , распределенной равномерно в интервале $(2, 8)$.

Ответ: 28, $4\sqrt{7}$?

5. Найти формулу плотности вероятности нормально распределенной случайной величины X , если математическое ожидание равно 3, а дисперсия равна 16.

Ответ: $f(x) = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-3)^2}{32}}$

6. Случайная величина X распределена нормально с математическим ожиданием 25. Вероятность попадания X в интервал $(10, 15)$ равна 0,2. Найти вероятность попадания X в интервал $(35, 40)$.

Ответ: 0,2

7. Размер мужских сорочек является случайной величиной с нормальным законом распределения, математическим ожиданием 39 и дисперсией 9. Какой процент от общего объема заказа следует предусмотреть магазину для сорочек 40-го размера воротничка при условии, что этот размер находится в интервале (39.5, 40.5)?

Ответ: 12,6 %.

8. В урне 8 шаров, из которых 5 белых, остальные черные. Из нее вынимают наудачу 3 шара. Найти закон распределения числа белых шаров в выборке, найти функцию распределения и построить ее график.

Ответ: П. стр. 67

9. Два стрелка делают по одному выстрелу в одну мишень. Вероятность попадания для первого стрелка равна 0,6, а для второго 0,8. Найти и построить функцию распределения случайной величины X – числа попаданий в мишень.

Ответ: П. 2.3 (1)

10. Дискретная случайная величина задана рядом распределения:

X	2	4	7
P	0,5	0,2	p_3

Построить функцию распределения и ее график.

Ответ: Т.

11. Функция равномерного распределения:
$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1, \\ \frac{x-1}{5}, & 1 < x \leq 6, \\ 1, & x > 6. \end{cases}$$

Найти плотность равномерного распределения, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

Ответ: Т.

12. Плотность равномерного распределения дается формулой
$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \frac{1}{5}, & 0 < x \leq 5, \\ 0, & x > 5. \end{cases}$$

Найти функцию равномерного распределения, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

Ответ: Т.

Приложение 2

Таблица значений функции $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \frac{1}{z} dz$

x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)
0,00	0,0000	0,32	0,1255	0,64	0,2389	0,96	0,3315
0,01	0,0040	0,33	0,1293	0,65	0,2422	0,97	0,3340
0,02	0,0080	0,34	0,1331	0,66	0,2454	0,98	0,3365
0,03	0,0120	0,35	0,1368	0,67	0,2486	0,99	0,3389
0,04	0,0160	0,36	0,1406	0,68	0,2516	1,00	0,3413
0,05	0,0199	0,37	0,1443	0,69	0,2549	1,01	0,3438
0,06	0,0239	0,38	0,1480	0,70	0,2580	1,02	0,3461
0,07	0,0279	0,39	0,1517	0,71	0,2611	1,03	0,3485
0,08	0,0319	0,40	0,1554	0,72	0,2642	1,04	0,3508
0,09	0,0359	0,41	0,1591	0,73	0,2673	1,05	0,3531
0,10	0,0398	0,42	0,1628	0,74	0,2703	1,06	0,3554
0,11	0,0438	0,43	0,1664	0,75	0,2734	1,07	0,3577
0,12	0,0478	0,44	0,1700	0,76	0,2764	1,08	0,3599
0,13	0,0517	0,45	0,1736	0,77	0,2794	1,09	0,3621
0,14	0,0557	0,46	0,1772	0,78	0,2823	1,10	0,3643
0,15	0,0596	0,47	0,1808	0,79	0,2852	1,11	0,3665
0,16	0,0636	0,48	0,1844	0,80	0,2881	1,12	0,3686
0,17	0,0675	0,49	0,1879	0,81	0,2910	1,13	0,3708
0,18	0,0714	0,50	0,1915	0,82	0,2939	1,14	0,3729
0,19	0,0753	0,51	0,1950	0,83	0,2967	1,15	0,3749
0,20	0,0793	0,52	0,1985	0,84	0,2995	1,16	0,3770
0,21	0,0832	0,53	0,2019	0,85	0,3023	1,17	0,3790

x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)
0,22	0,0871	0,54	0,2054	0,86	0,3051	1,18	0,3810
0,23	0,0910	0,55	0,2088	0,87	0,3078	1,19	0,3830
0,24	0,0948	0,56	0,2123	0,88	0,3106	1,20	0,3849
0,25	0,0987	0,57	0,2157	0,89	0,3133	1,21	0,3869
0,26	0,1026	0,58	0,2190	0,90	0,3159	1,22	0,3883
0,27	0,1064	0,59	0,2224	0,91	0,3186	1,23	0,3907
0,28	0,1103	0,60	0,2257	0,92	0,3212	1,24	0,3925
0,29	0,1141	0,61	0,2291	0,93	0,3228	1,25	0,3944
0,30	0,1179	0,62	0,2324	0,94	0,3264	1,26	0,3962
0,31	0,1217	0,63	0,2357	0,95	0,3289	1,27	0,3980
0,32	0,1254	0,64	0,2389	0,96	0,3315	1,28	0,3997
0,33	0,1291	0,65	0,2422	0,97	0,3340	1,29	0,4015
0,34	0,1328	0,66	0,2454	0,98	0,3365	1,30	0,4032
0,35	0,1364	0,67	0,2486	0,99	0,3389	1,31	0,4049
0,36	0,1400	0,68	0,2516	1,00	0,3413	1,32	0,4066
0,37	0,1436	0,69	0,2549	1,01	0,3438	1,33	0,4082
0,38	0,1471	0,70	0,2580	1,02	0,3461	1,34	0,4099
0,39	0,1506	0,71	0,2611	1,03	0,3485	1,35	0,4115
0,40	0,1541	0,72	0,2642	1,04	0,3508	1,36	0,4131
0,41	0,1575	0,73	0,2673	1,05	0,3531	1,37	0,4147
0,42	0,1609	0,74	0,2703	1,06	0,3554	1,38	0,4162
0,43	0,1643	0,75	0,2734	1,07	0,3577	1,39	0,4177
0,44	0,1677	0,76	0,2764	1,08	0,3599	1,40	0,4192
0,45	0,1710	0,77	0,2794	1,09	0,3621	1,41	0,4207
0,46	0,1744	0,78	0,2823	1,10	0,3643	1,42	0,4222
0,47	0,1777	0,79	0,2852	1,11	0,3665	1,43	0,4236
0,48	0,1810	0,80	0,2881	1,12	0,3686	1,44	0,4251
0,49	0,1843	0,81	0,2910	1,13	0,3708	1,45	0,4265
0,50	0,1876	0,82	0,2939	1,14	0,3729		
0,51	0,1908	0,83	0,2967	1,15	0,3749		
0,52	0,1940	0,84	0,2995	1,16	0,3770		
0,53	0,1972	0,85	0,3023	1,17	0,3790		

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
1,46	0,4279	1,79	0,4633	2,24	0,4875	2,90	0,4981
1,47	0,4292	1,80	0,4641	2,26	0,4881	2,92	0,4982
1,48	0,4306	1,81	0,4649	2,28	0,4887	2,94	0,4984
1,49	0,4319	1,82	0,4656	2,30	0,4893	2,96	0,4985
1,50	0,4332	1,83	0,4664	2,32	0,4898	2,98	0,4986
1,51	0,4345	1,84	0,4671	2,34	0,4904	3,00	0,49865
1,52	0,4357	1,85	0,4678	2,36	0,4909	3,20	0,49931
1,53	0,4370	1,86	0,4686	2,38	0,4913	3,40	0,49966
1,54	0,4382	1,87	0,4693	2,40	0,4918	3,60	0,499841
1,55	0,4394	1,88	0,4699	2,42	0,4922	3,80	0,499928
1,56	0,4406	1,89	0,4706	2,44	0,4927	4,00	0,499968
1,57	0,4418	1,90	0,4713	2,46	0,4931	4,50	0,499997
1,58	0,4429	1,91	0,4719	2,48	0,4934	5,00	0,499997
1,59	0,4441	1,92	0,4726	2,50	0,4938		
1,60	0,4452	1,93	0,4732	2,52	0,4941		