# Основные положения теории вероятностей

**Случайным** относительно некоторых условий называется событие, которое при осуществлении этих условий может либо произойти, либо не произойти.

Теория вероятностей имеет дело со случайными событиями, однако она не может предсказать, произойдет ли единичное событие или нет. Теория вероятностей изучает вероятностные закономерности массовых однородных случайных событий. В последние годы аппарат теории вероятностей активно используется в экономике.

## 1. Некоторые формулы комбинаторики

Пусть задано конечное множество элементов некоторой природы. Из них можно составлять определенные комбинации.

1. Комбинации, состоящие из одной и той же совокупности $n$ различных элементов и различающиеся только порядком их расположения, называются **перестановками.** Число всех возможных перестановок определяется произведением чисел от единицы до $n$:

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n = n\,!$$

Пример 1. Сколькими способами можно расставить на полке 5 книг?

$P_5 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 5\,! = 120$ способов.

Пример 2. Порядок выступления 7 участников конкурса определяется жребием. Сколько различных вариантов жеребьевки при этом возможно?

$P_7 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 7\,! = 5040$ вариантов.

2. Комбинации по $m$ элементов, составленные из $n$ различных элементов ($m \le n$), отличающиеся друг от друга <u>либо элементами, либо их порядком</u>, называются **размещениями.** Число всевозможных размещений:

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)$$

Пример 3. Расписание одного дня состоит из 5 уроков. Определить число вариантов расписания при выборе из 11 дисциплин.

Каждый вариант расписания представляет набор 5 дисциплин из 11, отличающийся от других вариантов, как составом дисциплин, так и порядком их следования (или и тем, и другим), т.е. является размещением из 11 элементов по 5.

Число вариантов расписаний, т.е. число размещений из 11 по 5, находим по формуле размещения.

$$A_{11}^{5} = \underbrace{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}_{5\,сомножителей} = 55440$$

Пример 4. В группе 30 человек. Необходимо выбрать старосту, его заместителя и профорга. Сколько существует способов это сделать?

$$A_{30}^{3} = 30 \cdot 29 \cdot 28 = 24360 \text{ способов.}$$

3. Комбинации, содержащие по $m$ элементов каждая, составленные из $n$ различных элементов ($m \le n$), и различающиеся хотя бы одним элементом, называются **сочетаниями.** Число сочетаний определяется формулой

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Пример 5. Сколькими способами можно выбрать: а) по 2 карты; б) по 32 карты из колоды, содержащей 36 игральных карт?

а) $C_{36}^{2} = \dfrac{36!}{2!34!} = \dfrac{35 \cdot 36}{1 \cdot 2} = 630$

б) $C_{36}^{32} = \dfrac{36!}{32!\,4!} = \dfrac{33 \cdot 34 \cdot 35 \cdot 36}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 58905$

Задачи:

1. Группа студентов изучает 10 различных дисциплин. Сколькими способами можно составить расписание занятий в понедельник, если в этот день должно быть 4 разных занятия?
2. Сколькими способами 3 награды могут быть распределены между 10 участниками соревнования?
3. В электричке 12 вагонов. Сколько существует способов размещения 4 пассажиров, если в одном вагоне должно быть не более одного пассажира?
4. В шахматном турнире участвуют 16 человек. Сколько партий должно быть сыграно в турнире, если между любыми двумя участниками должна быть сыграна одна партия?

## 2. Виды случайных событий

Обычно в теории вероятностей вместо термина «совокупность условий» употребляют термин «испытание», и тогда событие трактуется как результат испытания.

**Определение 1.** События называют **несовместными**, если в одном и том же испытании появление одного из них исключает появление других.

Например, выпадение «орла» при подбрасывании монеты исключает появление в этом же испытании «решки», и наоборот.

**Определение 2**. Несколько событий образуют полную группу, если в результате испытания появление хотя бы одного из них является достоверным событием. Например, при произведении выстрела по мишени (испытание) обязательно будет либо попадание, либо промах; эти два события образуют полную группу.

## 3. Понятие вероятности

Назовем каждый из возможных результатов испытания **элементарным событием, или исходом**.

Те элементарные исходы, которые, интересуют нас, называются **благоприятными событиями.**

**Определение 3**. Отношение числа благоприятствующих событию А элементарных исходов $m$ к общему числу равновозможных несовместных элементарных исходов $n$, образующих полную группу, называется **вероятностью события А**.

Вероятность события $A$ обозначается $P(A)$.

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

Понятие вероятности является одним из основных в теории вероятностей. Данное ранее его определение является **классическим**.

Из него вытекают некоторые свойства.

Свойство 1. Вероятность достоверного события равна единице.

Свойство 2. Вероятность невозможного события равна нулю.

Свойство 3. Вероятность любого события удовлетворяет неравенству

$$0 \le P(A) \le 1$$

Пример. В коробке лежат 10 шаров: 6 белых и 4 черных. Найти вероятность того, что из пяти взятых наугад шаров будет 4 белых.

Решение. Найдем число благоприятных исходов; число способов, которыми можно взять 4 белых шара из 6 имеющихся, равно

$$C_6^4 = \frac{6!}{2!4!} = \frac{5 \cdot 6}{1 \cdot 2} = 15$$

Общее число исходов определяется числом сочетаний из 10 по 5:

$$C_{10}^5 = \frac{10!}{5!5!} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 252$$

Согласно определению, искомая вероятность

$$P(A) = \frac{15}{252} \approx 0{,}06$$

**Задачи.**

1. Пусть имеется 80 деталей, среди которых 60 исправных, а 20 бракованных. Найти вероятность того, что взятая наугад деталь окажется исправной.
2. При бросании игральной кости возможны шесть исходов – выпадение *1, 2, 3, 4, 5, 6* очков. Какова вероятность появления четного числа очков?

## 4. Произведение событий и условная вероятность

**Определение 4.** Произведением двух событии А и В называется событие АВ, означающее совместное появление этих событий.

Например, если событие А — шар, событие В — белый цвет, то их произведение АВ — белый шар. Аналогично определяется произведение нескольких событий как совместное появление всех их.

Если при вычислении вероятности события никаких других ограничений, кроме необходимого комплекса условий $S$, не налагается, то такая вероятность называется **безусловной.**

Если же налагаются другие дополнительные условия, содержащие случайные события, то вероятность такого события называется **условной**.

**Определение 5**. Вероятность события B в предположении о наличии события A называют условной вероятностью $P_A(B)$

Пример. В ящике лежат 11 деталей, 3 из них нестандартные. Из ящика дважды берут по одной детали, не возвращая их обратно. Найти вероятность того, что во второй раз из ящика будет извлечена нестандартная деталь — событие B, если в первый раз взяли нестандартную.

Решение. После первого извлечения в ящике из 10 деталей имеется 8 стандартных, и следовательно, искомая вероятность

$P_A(B) = 0{,}8$.

Пусть теперь известны вероятность $P(A)$ события $A$ и условная вероятность $P_A(B)$ события $B$. Тогда справедлива следующая теорема.

**Теорема.** Вероятность произведения двух событий определяется формулой:

$$P(AB) = P(A) \cdot P_A(B)$$

или

$$P(AB) = P(B) \cdot P_B(A)$$

Пример. В условиях предыдущего примера найти вероятность того, что в первый раз извлечена нестандартная деталь, а во второй раз — стандартная.

Решение. Итак, событие A — это извлечение из ящика нестандартной детали, а событие B — стандартной. Тогда вероятность P(A)=3/11, а условная вероятность $P_A(B) = 0{,}8$. Искомая вероятность произведения этих событий (их совместного появления в указанном порядке) равна, согласно теореме $P(AB) = P(A) \cdot P_A(B) = \frac{3}{11} \cdot \frac{8}{10} \approx 0{,}22$

Теорема допускает обобщение на случай произведения любого числа событий.

Пример 5. В урне находятся 4 белых шара, 5 красных и 3 синих. Наудачу извлекают по одному шару, не возвращая его обратно. Найти вероятность того, что в первый раз появится белый шар (событие A), во второй раз — красный (событие B), в третий — синий (событие C).

Решение. Вероятность появления белого шара в первом извлечении P(A) = 1/3; условная вероятность появления красного шара по втором извлечении при условии появления в первый раз белого шара $P_A(B)$ =5/11; условная вероятность появления синего шара в третьем извлечении при условиях появления и предыдущих извлечениях белого и красного шаров $P_{AB}(C)$ = 0,3. Искомая вероятность равна: $P(ABC) = P(A)P_A(B)P_{AB}(C) = \frac{1}{3}\cdot\frac{5}{11}\cdot\frac{3}{10} = \frac{1}{22} \approx 0{,}045$.

## 5. Независимые события

**Определение 6**. Событие B называется независимым от события A, если условная вероятность события B равна его безусловной вероятности (появление события A не влияет на вероятность события B):

$$P_A(B) = P(B).$$

**Теорема** умножения вероятностей для независимых событий: вероятность произведения независимых событий равна произведению вероятностей этих событий.

Пример 6. Найти вероятность поражения цели при совместной стрельбе тремя орудиями, если вероятности поражения цели орудиями равны 0,9, 0,8 и 0,7 соответственно (события A, B и C).

Решение. Поскольку события A, B и C являются независимыми, то искомая вероятность вычисляется так: P(ABC)=P(A)P(B)P(C)= 0.9 · 0,8 · 0,7 = 0,504

Когда в результате испытания могут иметь место $n$ независимых событий с известными вероятностями их появления, особый интерес представляет случай нахождения вероятности наступления хотя бы одного из них (например, в случае трех событий — найти вероятность наступления либо одного, либо двух, либо трех событий). Обозначим эти события через A. Справедлива следующая теорема.

**Теорема.** Вероятность появления хотя бы одного из независимых событий $A_1, A_2, \ldots A_n$ определяется формулой

$$P(A) = 1 - q_1 q_2 \cdots q_n$$

где $q_i = 1 - p_i$ — вероятности соответствующих противоположных событий $\overline{A_i}$ $(i = 1,2,...n)$.

В частном случае, когда все события А, имеют одинаковую вероятность $p$, из теоремы следует, что

$$P(A) = 1 - q^n, \quad q = 1 - p.$$

Пример. На перевозку груза направлены 4 автомобиля. Вероятность нахождения каждой из машин в исправном состоянии равна 0,8. Найти вероятность того, что в работе участвует хотя бы один из выделенных для этого автомобилей.

Решение. Вероятность противоположного события (машина неисправна) равна $q = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$. Искомая вероятность: $P(A) = 1 - q^4 = 1 - 0{,}2^4 = 0{,}9984$.

## 6. Сложение вероятностей совместных событий

**Определение 7.** События А и В называют совместными, если в одном и том же испытании появление одного из них не исключает появление другого.

**Определение 8.** Суммой двух событий А и В называют событие С = А + В, которое состоит в появлении либо события А, либо события В, либо А и В одновременно.

Аналогично определяется сумма нескольких событий, состоящая в появлении хотя бы одного из этих событий.

**Теорема.** Вероятность суммы совместных событий равна сумме их вероятностей без вероятности их произведения:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

Частные случаи:

1. Для независимых событий: $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B)$

2. Для зависимых событий: $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A)P_A(B)$

3. Для несовместных событий $P(AB) = 0$, и в этом случае имеем $P(A + B) = P(A) + P(B)$.

Пример. Вероятности поражения цели первым и вторым орудиями равны, соответственно, 0,8 и 0,9. Найти вероятность поражения цели при залпе.

Решение. Поскольку вероятности поражения цели орудиями (события А и В соответственно) не зависят от результатов стрельбы каждого из напарников, то эти события независимы. Искомая вероятность рас-
считывается по формуле:

$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A)P(B)$ = 0,8 + 0,9 − 0,72 = 0,98.

В случае полной группы событий $A_1, A_2, ...A_n$ сумма их вероятностей равна единице:

$$P(A_1)+P(A_2)+...+P(A_n)=1.$$

## 7. Формула Бернулли

**Определение.** Если при проведении нескольких испытаний вероятность события А в каждом испытании не зависит от исходов других событий, то эти испытания называются **независимыми относительно события А.**

Будем рассматривать только такие независимые испытания, в которых событие А имеет одинаковую вероятность. Пусть производится $n$ независимых испытаний, в каждом из которых событие А может появиться с вероятностью $p$. Тогда вероятность противоположного события — не наступления события А — также постоянна в каждом испытании и равна $q=1-p$. В теории вероятностей представляет особый интерес случай, когда в $n$ испытаниях событие А осуществляется $k$ раз и не осуществится $n-k$ раз.

Вероятность этого сложного события, состоящего из $n$ испытаний, дается **формулой Бернулли:**

$$P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k} \text{ или } P_n(k)=\frac{n!}{k!(n-k)!}p^k q^{n-k}$$

Пример. Контрольный тест состоит из 4 вопросов. На каждый вопрос предлагается 4 варианта ответов, среди которых только один правильный. Найти вероятность правильного ответа на 2.3 и 4 вопроса теста для неподготовленного человека (выбор ответа наудачу).

Решение. Искомые значения вероятности находятся по формуле Бернулли с учетом того, что вероятность события А (правильный ответ) в каждом испытании (выбор ответа на вопрос теста) равна 0,25,

а $q = 0{,}75$. Отсюда получаем:

$$P_4(2) = C_4^2 p^2 q^2 = \frac{4!}{2!(4-2)!} 0{,}25^2 0{,}75^2 = \frac{27}{128} \approx 0{,}21$$

$$P_4(3) = C_4^3 p^3 q^1 = \frac{4!}{3!(4-3)!} 0{,}25^3 0{,}75 = \frac{3}{64} \approx 0{,}047$$

$$P_4(4) = C_4^4 p^4 q^0 = \frac{4!}{4!(4-4)!} 0{,}25^4 0{,}75^0 = \frac{1}{256} \approx 0{,}004$$

## 8. Формула полной вероятности

Пусть события $B_1, B_2, ... B_n$ несовместны и образуют полную группу, т. е. выполняется равенство:

$$P(B_1) + P(B_2) + ... + P(B_n) = 1.$$

Пусть также событие $A$ может наступить при условии появления одного из событий $B_i$, причем известны как вероятности $P(B_i)$, так и условные вероятности $P_{B_i}(A)$ ($i = 1,2,....n$). В таком случае формула для вероятности события $A$ определяется следующей теоремой.

**Теорема.** Вероятность события $A$, появление которого возможно лишь при наступлении одного из несовместных событий $B_i$, образующих полную группу ($i = 1,2,....n$), равно сумме попарных произведений каждого из этих событий на соответствующую условную вероятность появления события $A$:

$$P(A) = P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) + ... + P(B_n)P_{B_n}(A).$$

**Пример.** В двух урнах находятся белые и красные шары: в первой — 4 белых и 5 красных, во второй — 7 белых и 3 красных. Из второй урны наудачу взяли шар и переложили его в первую урну. Найти вероятность того, что наудачу взятый после этого из первой урны шар будет белым.

Решение. Перекладывание из второй урны в первую белого шара (событие $B_1$) и красного шара (событие $B_2$) образуют полную группу независимых событий. Их вероятности, соответственно, $P(B_1)$= 0,7 и $P(B_2)$= 0,3. Условные вероятности извлечения из первой урны белого шара (событие $A$) при добавлении туда белого или красного тара из второй урны равны $P_{B_1}(A)$ = 0,5 и $P_{B_2}(A)$ = 0,4 соответственно. Искомая вероятность находится по формуле:

$$P(A) = P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) = 0{,}7 \cdot 0{,}5 + 0{,}3 \cdot 0{,}4 = 0{,}47$$

## 9. Формулы Байеса

Пусть события $B_1, B_2, ... B_n$ несовместны и образуют полную группу, а событие $A$ может наступить при условии появления одного из них.

События $B_i$ называют гипотезами, гак как заранее неизвестно, какое из них наступит. Пусть произведено испытание и в результате появилось событие $A$. Тогда оказывается возможным определить условные вероятности гипотез $B_i$ по следующим формулам:

$$P_A(B_i) = \frac{P(B_i)P_{B_i}(A)}{P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) + ... + P(B_n)P_{B_n}(A)}$$

Эти формулы называются формулами Байеса, по имени их автора.

Они позволяют оценить вероятность гипотезы $B_i$, во всех испытаниях, где наступает событие А. Иными словами, зная вероятность $P(B_i)$ до проведения испытания, мы можем переоценить ее после проведения испытания, в результате которого появилось событие А.

**Пример.** В среднем из каждых 100 клиентов отделения банка 60 обслуживаются первым операционистом и 40 — вторым операционистом. Вероятность того, что клиент будет обслужен без помощи заведующего отделением, только самим операционистом, составляют 0,9 и 0,75 соответственно для первого и второго служащих банка. Найти вероятность полного обслуживания клиента первым операционистом.

Решение. Вероятность того, что клиент попадает к первому операционисту (событие $B_1$), составляет 0.6, ко второму — 0.4 (событие $B_2$). Искомая вероятность полного обслуживания клиента первым операционистом (событие $A$) определяется но формулам:

$$P_A(B_1) = \frac{P(B_1)P_{B_1}(A)}{P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A)} = \frac{0,6 \cdot 0,9}{0,6 \cdot 0,9 + 0,4 \cdot 0,75} = 0,64$$

Иными словами, 64 % клиентов, попавших на обслуживание к первому операционисту, будет обслужено им полностью.

**Примеры решения задач:**

**<u>Пример 1.</u>** Вероятность изготовления на автоматическом станке стандартной детали равна 0,8. Найти вероятности возможного числа появления бракованных деталей среди 5 отобранных.

**<u>Решение</u>**. Вероятность изготовления бракованной детали р = 1 – 0,8 = 0,2. Искомые вероятности находим по формуле Бернулли:

$P_{0,5} = C^0{}_5 0{,}2^0 0{,}8^5 = 0{,}32768;$ $\quad P_{1,5} = C^1{}_5 0{,}2^1 0{,}8^4 = 0{,}4096;$

$P_{2,5} = C^2{}_5 0{,}2^2 0{,}8^3 = 0{,}2048;$ $\quad P_{3,5} = C^3{}_5 0{,}2^3 0{,}8^2 = 0{,}0512;$

$P_{4,5} = C^4{}_5 0{,}2^4 0{,}8^1 = 0{,}0064;$ $\quad P_{5,5} = C^5{}_5 0{,}2^5 0{,}8^0 = 0{,}00032.$

**<u>Пример 2</u>.** Два стрелка независимо друг от друга стреляют по мишени, делая каждый по одному выстрелу. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка равна 0,8; для второго – 0,4. После стрельбы в мишени обнаружена одна пробоина. Какова вероятность того, что она принадлежит: а) 1-му стрелку; б) 2-му стрелку?

**<u>Решение:</u>** Обозначим события:

$A_1$ - оба стрелка не попали в мишень;

$A_2$ - оба стрелка попали в мишень;

$A_3$ - 1-й стрелок попал в мишень, 2-й нет;

$A_4$ - 1-й стрелок не попал в мишень, 2-й попал;

$F$ - в мишени одна пробоина (одно попадание).

Найдём вероятности гипотез и условные вероятности события F для этих гипотез:

$$P(A_1) = 0{,}2 \cdot 0{,}6 = 0{,}12, \qquad P_{A_1}(F) = 0;$$

$$P(A_2) = 0{,}8 \cdot 0{,}4 = 0{,}32, \qquad P_{A_2}(F) = 0;$$

$$P(A_3) = 0{,}8 \cdot 0{,}6 = 0{,}48, \qquad P_{A_3}(F) = 1;$$

$$P(A_4) = 0{,}2 \cdot 0{,}4 = 0{,}08, \qquad P_{A4}(F) = 1;$$

Теперь по формуле Байеса:

$$P_F(A_3) = \frac{0{,}48 \cdot 1}{0{,}12 \cdot 0 + 0{,}32 \cdot 0 + 0{,}48 \cdot 1 + 0{,}08 \cdot 1} = \frac{6}{7} = 0{,}857,$$

$$P_F(A_4) = \frac{0{,}08 \cdot 1}{0{,}12 \cdot 0 + 0{,}32 \cdot 0 + 0{,}48 \cdot 1 + 0{,}08 \cdot 1} = \frac{1}{7} = 0{,}143,$$

т.е. вероятность того, что попал в цель 1-й стрелок при наличии одной пробоины, в 6 раз выше, чем для второго стрелка.

Ответ: $P_F(A_3) = 0{,}857$, $P_F(A_4) = 0{,}143$.

**Пример 3.** В торговую фирму поступили телевизоры от трех поставщиков в отношении 1:4:5. Практика показала, что телевизоры, поступающие от 1-го, 2-го и 3-го поставщиков, не потребуют ремонта в течение гарантийного срока соответственно в 98%, 88% и 92% случаев.

1) Найти вероятность того, что поступивший в торговую фирму телевизор не потребует ремонта в течение гарантийного срока.

2) Проданный телевизор потребовал ремонта в течение гарантийного срока. **Решение:**

1) Обозначим события:

$A_i$ -телевизор поступил в торговую фирму от $I$-го поставщика ($I$=1,2,3);

$F$ - телевизор не потребует ремонта в течение гарантийного срока.

По условию

$$P(A_1) = \frac{1}{1+4+5} = 0{,}1 \qquad P_{A_1}(F) = 0{,}98$$

$P(A_2) = \frac{4}{1+4+5} = 0,4$ $\qquad\qquad$ $P_{A2}(F) = 0,88$

$P(A_3) = \frac{5}{1+4+5} = 0,5$ $\qquad\qquad$ $P_{A3}(F) = 0,92$

По формуле полной вероятности

$$P(F) = 0,1 \cdot 0,98 + 0,4 \cdot 0,88 + 0,5 \cdot 0,92 = 0,91$$

2) Событие $\overline{F}$ - телевизор потребует ремонта в течение гарантийного срока;

$$P(\overline{F}) = 1 - P(F) = 1 - 0,91 = 0,09$$

**Задачи:**

1. В урне находятся 10 шаров, 7 из которых белых. Найти вероятность того, что из 6 взятых наугад шаров будет 4 белых.

(Ответ: 0,5)

2. В ящике имеется 15 деталей, из которых 10 стандартных. Сборщик наугад берет 3 детали. Найти вероятность того, что все взятые детали будут стандартными.

(Ответ: $\frac{24}{91}$)

3. В лотерее разыгрывается 200 вещевых и 50 денежных выигрышей на каждые 10 тыс. билетов. Чему равна вероятность выигрыша вообще?

(Ответ: 0,025)

4. В читальном зале имеется 6 учебников, из которых три нового выпуска. Читатель последовательно, один за другим, взял 2 учебника. Найти вероятность того, что обе взятых книги нового выпуска.

(Ответ: 0,2)

5. Три автомашины направлены на перевозку груза. Вероятность исправного состояния первой из них составляет 0,7, второй — 0,8 и третьей — 0,5. Найти вероятность того, что все три автомашины находятся в эксплуатации.

(Ответ: 0,28)